Челябинский государственный университет

В.Е.Федоров

ПОЛУГРУППЫ
И ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ

Учебное пособие

Челябинск
1998

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Челябинский государственный университет

В.Е.Федоров

ПОЛУГРУППЫ И ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ

Учебное пособие

Челябинск 1998

ББК В162 я 73
Ф333

Ф333 Полугруппы и группы операторов с ядрами: Учеб. пособие / В.Е.Федоров; Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 1998. 78 с.
ISBN 5-230-20012-x

Настоящее пособие посвящено теории полугрупп и групп операторов с ядрами, разрешающих уравнения типа Соболева. Несмотря на научную новизну этой теории, материал изложен на уровне, доступном для студентов старших курсов математических специальностей. Приводится большое количество упражнений, способствующих лучшему усвоению материала.

Предназначено для студентов математических специальностей.

Библиогр.: 13 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Челябинского государственного университета.

Рецензенты: кафедра математического анализа ЧГПУ;
канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического анализа ЧГТУ Л.В.Матвеева

$$Ф\frac{1702050000 - 013}{4к8(03) - 98}$$ Без объявл. В 162 я 73-1

ISBN 5-230-20012-x

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном учебном пособии излагается новое направление теории полугрупп операторов – теория полугрупп операторов с ядрами, применяемая для качественного исследования решений уравнений типа Соболева. К задаче Коши для таких уравнений сводятся многие начально-краевые задачи из приложений.

Поскольку теория полугрупп и функциональный анализ вообще – для студентов наука достаточно сложная, автор старался не пропускать очевидных для опытных математиков вещей. Сначала автор их подробно объяснял, а если они попадались еще раз, оставлял их в качестве упражнений. Большое количество упражнений поможет читателю скорее почувствовать себя причастным к построению теории полугрупп с ядрами.

В заключение автор выражает глубочайшую и искреннюю благодарность Г.А.Свиридюку, без научной и педагогической деятельности которого не было бы изложенной здесь теории.

ВВОДНАЯ ГЛАВА

1.1.Необходимые сведения из функционального анализа

Множество $\mathcal{X}$ называется *линейным* или *векторным пространством* над полем дествительных (комплексных) чисел, если

1) определена операция сложения: любым элементам $x, y \in \mathcal{X}$ соответствует определенный элемент, называемый их суммой $x+y \in \mathcal{X}$;

2) $x + y = y + x$;

3) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

4) существует нулевой элемент $0 \in \mathcal{X}$ такой, что $x + 0 = x$;

5) для любого $x \in \mathcal{X}$ существует $-x \in \mathcal{X}$ такой, что $x+(-x)=0$;

6) определена операция умножения на число: любому $x \in \mathcal{X}$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ соответствует определенный элемент $\lambda x \in \mathcal{X}$;

7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

8) $1 \cdot x = x$;

9) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

10) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Элементы линейного пространства будем называть векторами или точками.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1.1. Нулевой элемент единственный.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1.2. Обратный элемент единственный.

Линейное пространство $\mathcal{X}$ называется *нормированным*, если каждому $x \in \mathcal{X}$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|_{\mathcal{X}}$ (нижний индекс мы обычно будем опускать), называемое *нормой* x, так, что выполнены следующие аксиомы:

1) $\|x\| \geq 0$;

2) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$;

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in \mathcal{X}$.

Каждому вещественному линейному пространству $\mathcal{X}$ соответствует комплексное линейное пространство $\tilde{\mathcal{X}}$, которое состоит из всевозможных формальных сумм $z = x + iy$, где $x, y \in \mathcal{X}$, а i – мнимая единица. Понятно, что $\mathcal{X} \subset \tilde{\mathcal{X}}$. Такое включение $\mathcal{X}$ в пространство $\tilde{\mathcal{X}}$ называется комплексификацией банахова пространства $\mathcal{X}$.

Последовательность векторов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$ называют *сходящейся* к вектору $x \in \mathcal{X}$ и обозначают $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. (В дальнейшем под знаком предела последовательности $\lim$ будем писать только n, мотивируя это тем, что у множества натуральных чисел других предельных точек кроме бесконечности не существует).

Открытым шаром с центром в точке $x_0 \in \mathcal{X}$ и радиусом $r > 0$ называется множество $S_r(x_0) = \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| < r\}$.

Множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ называется ограниченным, если $\exists K > 0\ \forall x \in \mathcal{A}\ \|x\| \le K$.

Точка $a \in \mathcal{X}$ называется *предельной точкой* множества $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, если $\forall \varepsilon > 0\ S_\varepsilon(a) \cap \mathcal{A} \ne \oslash$. Другими словами, a – предельная точка множества $\mathcal{A}$, если существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, сходящаяся к a. *Замыканием* множества $\mathcal{A}$ называется объединение этого множества со всеми его предельными точками. Обозначается оно $\overline{\mathcal{A}}$. *Замкнутым* называется множество, совпадающее со своим замыканием. Множество $\mathcal{A}$ называется открытым, если замкнуто множество $\mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$.

Говорят, что множество $\mathcal{A}$ плотно в $\mathcal{B}$, если $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ и $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{B}}$.

Множество $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$ называется *линеалом* (или *линейным многообразием*), если $x + y \in \mathcal{L}$, $\lambda x \in \mathcal{L}$ для любых $x, y \in \mathcal{L}$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Замкнутый линеал $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$, называется *линейным подпространством* пространства $\mathcal{X}$.

Пусть $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ линеалы в пространстве $\mathcal{X}$, причем $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \{0\}$. Множество всевозможных векторов z вида $x + y$, где $x \in \mathcal{L}$, $y \in \mathcal{M}$, будем называть *прямой суммой* этих линеалов и обозначать $\mathcal{L} \dot{+} \mathcal{M}$. Если $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ замкнуты, то их прямая сумма обозначается через $\mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$ называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$. Линейное пространство $\mathcal{X}$ называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым*

Символами I и $\mathbb{O}$ будем обозначать, соответственно, тождественный и "нулевой"операторы, области определения которых ясны из контекста. Другими словами, $Ix = x$, $\mathbb{O}x = 0$.

Отображение (оператор) $A : \operatorname{dom} A \to \mathcal{Y}$ подмножества $\operatorname{dom} A$ линейного нормированного пространства $\mathcal{X}$ в линейное нормированное пространство $\mathcal{Y}$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in \operatorname{dom} A$, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \operatorname{dom} A$, сходящейся к x_0, $A(x_n) \to A(x_0)$ при $n \to \infty$. Оператор A называется *непрерывным*, если он непрерывен в каждой точке $x \in \operatorname{dom} A$.

Оператор A называется *ограниченным на множестве* $\operatorname{dom} A$, если $\exists C > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} A\ \|A(x)\|_{\mathcal{Y}} \le C\|x\|_{\mathcal{X}}$. Если $\operatorname{dom} A = \mathcal{X}$, то оператор просто называется *ограниченным.*

Образом оператора A называется множество $\operatorname{im} A = \{y \in \mathcal{Y} : \exists x \in \operatorname{dom} A \quad y = A(x)\}$, его *ядром* – множество $\ker A = \{x \in \operatorname{dom} A : A(x) = 0\}$.

Оператор A называется *линейным*, если $\operatorname{dom} A$ – линеал, и $A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$ при любых $x, y \in \operatorname{dom} A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. (У линейных операторов аргумент будем обозначать без скобок).

ТЕОРЕМА 1.1.1. *Пусть оператор* $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *линейный,* $\operatorname{dom} A = \mathcal{X}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны: а) оператор A непрерывен в одной точке; б) оператор A непрерывен; в) оператор A ограничен.*

Через $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ будем называть линейное нормированное пространство линейных непрерывных операторов A с $\operatorname{dom} A = \mathcal{X}$, если сложение операторов и умножение их на число определить естественным образом: $(A+B)x = Ax+Bx$, $(\lambda A)x = \lambda Ax$ при всех $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $x \in \mathcal{X}$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Норма в $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ задается следующим образом:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})} = \sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} : x \in \mathcal{X}, \|x\|_{\mathcal{X}} \le 1\}$$

$$= \sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} : x \in \mathcal{X}, \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\} =$$

$$\sup\left\{\frac{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} : x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}\right\} =$$

$$\inf\{C > 0 : \forall x \in \mathcal{X} \quad \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \le C\|x\|_{\mathcal{X}}\}.$$

Если $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, то обозначение пространства линейных непрерывных операторов сократится до $\mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ называют *равномерно сходящейся* к оператору $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, если $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})} \to 0$ при $n \to \infty$. Эта последовательность *сильно сходится* к A, если

$\forall x \in \mathcal{X}$ $\|A_n x - Ax\|_{\mathcal{Y}} \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначается такая сходимость следующим образом: $A = s\text{-}\lim\limits_n A_n$.

ТЕОРЕМА 1.1.2. *Пусть $\mathcal{Y}$ банахово пространство. Тогда $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ банахово пространство.*

ТЕОРЕМА 1.1.3. *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ банаховы пространства, для всех $n \in \mathbb{N}$ $A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, и для любого $x \in \mathcal{X}$ последовательность $\{\|A_n x\|_{\mathcal{Y}}\}$ ограничена. Тогда последовательность $\{\|A_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})}\}$ ограничена.*

ТЕОРЕМА 1.1.4. *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ банаховы пространства. Последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ сильно сходится к оператору $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена и при любом x из плотного в $\mathcal{X}$ линеала $A_n x \to Ax$ при $n \to \infty$.*

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – линейные нормированные пространства. Оператор $A : \operatorname{dom} A \to \mathcal{Y}$, $\operatorname{dom} A \subset \mathcal{X}$, инъективен. Тогда существует *обратный* оператор $A^{-1} : \operatorname{dom} A^{-1} \to \mathcal{X}$, отображающий $\operatorname{dom} A^{-1} = \operatorname{im} A$ на $\operatorname{dom} A$ биективно. Оператор A^{-1} линеен. Оператор A называется *непрерывно обратимым*, если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$.

ТЕОРЕМА 1.1.5. *Оператор A^{-1} существует и ограничен на $\operatorname{im} A$ тогда и только тогда, когда для некоторого $m > 0$ и для любого $x \in \operatorname{dom} A$ выполняется неравенство $\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \geq m\|x\|_{\mathcal{X}}$.*

ТЕОРЕМА 1.1.6. *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – банаховы пространства, оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\operatorname{im} A = \mathcal{Y}$ и A обратим. Тогда оператор A непрерывно обратим.*

ТЕОРЕМА 1.1.7. *Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ и $\|A\| < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим, причем*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Линейный оператор $A : \operatorname{dom} A \to \mathcal{Y}$ называется *замкнутым*, если из того, что $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} A$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ следует, что $x \in \operatorname{dom} A$ и $Ax = y$. Множество замкнутых операторов $A : \operatorname{dom} A \to \mathcal{Y}$ с областями определения, плотными в пространстве $\mathcal{X}$, будем обозначать $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Множество операторов $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{X})$ будем обозначать через $\mathcal{C}l(\mathcal{X})$.

ТЕОРЕМА 1.1.8. *Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ тогда и только тогда, когда он замкнут и определен на всем пространстве.*

ТЕОРЕМА 1.1.9. *Если оператор A замкнут и обратим, то оператор A^{-1} замкнут.*

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство, оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$. Комплексное число λ называется *регулярной точкой* оператора A, если оператор $\lambda I - A$ непрерывно обратим (существует оператор $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$). Совокупность всех регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством* оператора и обозначается $\rho(A)$. Если $\lambda \in \rho(A)$, то оператор $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A. *Спектром* оператора A называется множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

ТЕОРЕМА 1.1.10. *Резольвентное множество открыто, а спектр замкнут.*

ТЕОРЕМА 1.1.11. *Спектр непрерывного оператора A лежит в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|$.*

Комплексное число λ называется *собственным значением* оператора A, если существует такой вектор $x \in \operatorname{dom} A$, $x \neq 0$, что $Ax = \lambda x$. При этом x называется *собственным вектором* оператора A, соответствующим собственному значению λ. Всякое собственное значение λ оператора A является точкой его спектра, так как оператор $\lambda I - A$ при этом не обратим.

ТЕОРЕМА 1.1.12. *Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Тогда существует конечный предел*

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n},$$

называемый спектральным радиусом оператора A. При этом $r_\sigma(A) \leq \|A\|$.

ТЕОРЕМА 1.1.13. *Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $|\lambda| > r_\sigma(A)$. Тогда $\lambda \in \rho(A)$.*

Оператор-функция $A(\lambda) : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ называется *аналитической* в точке λ_0, если она разлагается в некоторой окрестности точки λ_0 в степенной ряд $A(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(\lambda - \lambda_0)^k$, сходящийся в этой окрестности. Заметим, что понятия аналитичности в смысле равномерной и в смысле сильной сходимости ряда эквивалентны.

ТЕОРЕМА 1.1.14. *$R_\lambda(A)$ – аналитическая функция λ в любой точке $\lambda \in \rho(A)$.*

ТЕОРЕМА 1.1.15. *Пусть оператор* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $|\lambda| > r_\sigma(A)$. *Тогда*

$$R_\lambda(A) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

ТЕОРЕМА 1.1.16. *Пусть* $\mathcal{X}$ *– банахово пространство, оператор* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. *Тогда* $\sigma(A) \neq \oslash$.

Оператор A называется *идемпотентным*, если $A^2 = A$. *Проектором* называется идемпотентный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. На пространстве X существует проектор A тогда и только тогда, когда $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, где $A\Big|_{\mathcal{X}^0} = \mathbb{O}$, $A\Big|_{\mathcal{X}^1} = I$.

Пространство $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathbb{R}(\mathbb{C}))$ называется *сопряженным* к $\mathcal{X}$ и обозначается $\mathcal{X}^*$. Его элементы называются *функционалами.* Если каждому элементу $x \in \mathcal{X}$ ставить в соответствие элемент $\tilde{x} \in \mathcal{X}^{**}$ по правилу $\tilde{x}(f) = f(x)$ $\forall f \in \mathcal{X}^*$, то нетрудно увидеть, что $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}^{**}$. Пространство $\mathcal{X}$ такое, что $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{**}$, называется *рефлексивным.*

Говорят, что последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ *слабо сходится* к $x \in \mathcal{X}$ и обозначают $x = w\text{-}\lim\limits_n x_n$, если $f(x_n)$ сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$ при любом функционале $f \in \mathcal{X}^*$.

1.2.Теоремы об инфинитезимальных генераторах и постановка задачи

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \in \operatorname{dom} M \tag{1.2.1}$$

для операторно-дифференциального уравнения

$$L\,\dot{u} = Mu. \tag{1.2.2}$$

Задача Коши (1.2.1),(1.2.2) представляет собой абстрактную форму многих начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений, моделирующих различные реальные процессы. Первым начал рассматривать начально-краевые задачи для уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производной по времени, С.Л.Соболев, поэтому такие уравнения, в частности уравнение (1.2.2), будем называть "уравнениями типа Соболева".

Если оператор L непрерывно обратим, то уравнение (1.2.2) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$\dot{u} = Su, \quad \dot{g} = Tg. \tag{1.2.3}$$

Здесь операторы $S = L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U})$, $\operatorname{dom} S = \operatorname{dom} M$, $T = ML^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{F})$, $\operatorname{dom} T = L[\operatorname{dom} M]$. Уравнения (1.2.3) удобно рассматривать в рамках уравнения на банаховом пространстве $\mathcal{V}$

$$\dot{v} = Av, \tag{1.2.4}$$

$A \in \mathcal{C}l(\mathcal{V})$. Решения задачи Коши

$$v(0) = v_0, \quad v_0 \in \operatorname{dom} A \tag{1.2.5}$$

для уравнения (1.2.4) удобно исследовать при помощи теории полугрупп.

Основным результатом классической теории полугрупп операторов является теорема Хилле – Иосиды – Феллера – Филлипса – Миядеры, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между разрешающей полугруппой уравнения (1.2.4) и оператором A, называемым инфинитезимальным генератором полугруппы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. *Полугруппой* (*группой*) линейных непрерывных операторов называется отображение $V^{\cdot} : \overline{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$ такое, что $V^t V^s = V^{t+s}$. (Здесь через $\overline{\mathbb{R}_+}$ обозначено множество $\{0\} \cup \mathbb{R}_+$).

Полугруппа (группа) называется *невырожденной*, если $V^0 = I$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.2. *Инфинитезимальным генератором* невырожденной полугруппы (группы) операторов называется оператор

$$Av = \lim_{t \to 0+} \frac{V^t v - v}{t} \quad \left(Av = \lim_{t \to 0} \frac{V^t v - v}{t} \right),$$

определенный на тех векторах v, при которых указанный предел существует. Этот оператор принадлежит множеству $\mathcal{C}l(\mathcal{V})$.

Критерием того, что оператор A является инфинитезимальным генератором полугруппы (группы) (иначе говорят, порождает полугруппу или группу), служат некоторые условия на резольвенту $R_\mu(A) = (\mu I - A)^{-1}$ оператора A. В зависимости от того, о каких условиях идет речь, мы будем говорить о полугруппах или группах, аналитических или сильно непрерывных относительно параметра t.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.3. Оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{V})$, удовлетворяющий условиям

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \mu > a \quad \mu \in \rho(A),$$

$$\exists K > 0 \quad \forall \mu > a \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|(R_\mu(A))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^n},$$

будем называть *радиальным.*

ТЕОРЕМА 1.2.1. *Оператор A радиален тогда и только тогда, когда он порождает сильно непрерывную (непрерывную в смысле сильной сходимости) полугруппу.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.4. Если оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{V})$ удовлетворяет условиям

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall |\mu| > a \quad \mu \in \rho(A),$$

$$\exists K > 0 \quad \forall |\mu| > a \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|(R_\mu(A))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \frac{K}{(|\mu| - a)^n},$$

будем называть его *бирадиальным.*

ТЕОРЕМА 1.2.2. *Оператор A порождает сильно непрерывную группу тогда и только тогда, когда он бирадиален.*

ТЕОРЕМА 1.2.3. *Полугруппа, порождаемая ограниченным оператором A, продолжается до аналитической группы. Обратно, генератором аналитической группы является ограниченный оператор.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.5. *Секториальным* называется оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{V})$, удовлетворяющий условиям

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \exists \theta \in (\pi/2, \pi)$$

$$S_{a,\theta}(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu \neq a\} \subset \rho(A),$$

$$\exists K > 0 \quad \forall \mu \in S_{a,\theta}(A) \quad \|R_\mu(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \frac{K}{|\mu - a|}.$$

ТЕОРЕМА 1.2.4 *Оператор A является генератором аналитической в некотором секторе, содержащем положительную полуось $\mathbb{R}_+$, полугруппы тогда и только тогда, когда он секториален.*

Теория полугрупп и групп операторов с ядрами, изложенная ниже, обобщает классическую теорию полугрупп операторов на случай уравнения (1.2.2), когда оператор L не является непрерывно обратимым. Характерной особенностью изучаемых здесь полугрупп является то, что их единицами (V^0) являются не тождественные операторы, а проекторы на некоторое подпространство.

Заметим, что речь в дальнейшем будет идти о двух полугруппах (группах), разрешающих уравнения

$$(\alpha L - M)^{-1} L\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} Mu \tag{1.2.6}$$

и

$$L(\alpha L - M)^{-1}\dot{g} = M(\alpha L - M)^{-1} g. \tag{1.2.7}$$

Эти уравнения при $\alpha \in \rho^L(M)$ равносильны уравнению (1.2.2), и их можно рассматривать как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv \tag{1.2.8}$$

с операторами $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $B \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $\mathcal{V}$ – банахово пространство.

УПРАЖНЕНИЕ 1.2.1. Показать, что

1) $u(t)$ – решение (1.2.2) тогда и только тогда, когда непрерывно дифференцируемая функция $f(t) = (\alpha L - M)u(t)$ – решение уравнения (1.2.7);

2) множества решений уравнений (1.2.2) и (1.2.6) совпадают.

1.3.Относительные резольвенты и относительно присоединенные векторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.1. Множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}$ и $\sigma^L(M) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \rho^L(M)$ будем называть, соответственно, *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* оператора M.

Легко увидеть, что, если пространство $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, а оператор $L = I$, то определение 1.3.1 совпадает с определением резольвентного множества и спектра оператора M.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3.1. *Пусть оператор L непрерывно обратим. Тогда $\rho^L(M) = \rho(L^{-1}M) = \rho(ML^{-1})$.*

$\triangleleft$ Покажем, что если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, то L-спектр оператора M совпадает со спектрами операторов $L^{-1}M$ и ML^{-1}. Пусть $\mu \in \rho^L(M)$, тогда оператор $(\mu L - M)^{-1} = (L(\mu I - L^{-1}M))^{-1} = (\mu I - L^{-1}M)^{-1}L^{-1}$ непрерывен. Если этот оператор домножим справа на оператор L, то получим непрерывный оператор (как композиция непрерывных) $(\mu I - L^{-1}M)^{-1}$. Поэтому $\mu \in \rho(L^{-1}M)$. Обратно, непрерывный оператор $(\mu I - L^{-1}M)^{-1} = (\mu L - M)^{-1}L$ домножим справа на непрерывный оператор L^{-1} и получим непрерывный оператор $(\mu L - M)^{-1}$. Поэтому $\rho(L^{-1}M) = \rho^L(M)$. $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 1.3.1. Завершить доказательство.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3.2. Доказать, что если оператор L непрерывно обратим, то радиальность, секториальность, ограниченность оператора $L^{-1}M$ равносильны соответственно радиальности, секториальности, ограниченности оператора ML^{-1}.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3.3. Доказать, что если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$, то $\rho^L(M) = \oslash$.

В дальнейших рассмотрениях нам понадобятся следующие тождества:

$$(\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M)u = u + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1}Lu, \quad u \operatorname{dom} M, \tag{1.3.1}$$

$$(\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} = I + (\lambda - \mu)L(\mu L - M)^{-1} \quad \forall \mu, \lambda \in \rho^L(M).$$

(Условимся, что если тождество записано в операторном виде, как последнее, то оно справедливо на всем пространстве). Для того, чтобы убедиться в их справедливости, достаточно, скажем, во втором из них в левой скобке вычесть и добавить оператор μL.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3.4. Доказать тождества (1.3.1).

ЛЕММА 1.3.1. *Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Тогда L-резольвентное множество оператора M $\rho^L(M)$ открыто.*

$\triangleleft$ Действительно, согласно теореме 1.1.7 и второму из тождеств (1.3.1) круг $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \mu| < \|L(\mu L - M)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}\} \subset \rho^L(M)$. Поэтому каждая точка μ лежит в $\rho^L(M)$ вместе с такой окрестностью. $\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 1.3.1. *L-спектр оператора M $\sigma^L(M)$ замкнут.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.2. Операторнозначные функции комплексного переменного с областью определения $\rho^L(M)$ $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ будем называть соответственно *L-резольвентой, правой* и *левой L-резольвентами* оператора M.

Покажем справедливость *L-резольвентных тождеств*, являющихся аналогами тождества Гильберта. Домножим второе из тождеств (1.3.1) на оператор $(\lambda L-M)^{-1}$ слева. Получим

$$(\mu-\lambda)(\lambda L-M)^{-1}L(\mu L-M)^{-1}=(\lambda L-M)^{-1}-(\mu L-M)^{-1},$$

$$(\mu-\lambda)R^L_\lambda(M)R^L_\mu(M)=R^L_\lambda(M)-R^L_\mu(M), \qquad (1.3.2)$$
$$(\mu-\lambda)L^L_\lambda(M)L^L_\mu(M)=L^L_\lambda(M)-L^L_\mu(M).$$

Очевидно, что правые и левые L-резольвенты коммутируют. Чтобы заметить это достаточно поменять в соответствующих тождествах (1.3.2) λ и μ местами.

Отметим еще два полезных тождества:

$$L(\mu L-M)^{-1}Mu=M(\mu L-M)^{-1}Lu, \quad u\in\operatorname{dom}M, \qquad (1.3.3)$$

$$(\mu L-M)^{-1}L(\lambda L-M)^{-1}=(\lambda L-M)^{-1}L(\mu L-M)^{-1}. \qquad (1.3.4)$$

Последнее получается из (1.3.2) также, как коммутирование правых и левых L-резольвент. Докажем (1.3.3). $L(\mu L-M)^{-1}(M-\mu L+\mu L)u=\mu L(\mu L-M)^{-1}Lu-Lu=\mu L(\mu L-M)^{-1}Lu-(\mu L-M)(\mu L-M)^{-1}Lu$.

ЛЕММА 1.3.2. *Пусть операторы $L\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M\in\mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M являются непрерывными в смысле сходимости по операторной норме функциями комплексного переменного.*

$\lhd$ Из теоремы 1.1.7 и тождеств (1.3.1) следует, что при λ достаточно близких к $\mu\in\rho^L(M)$ $(\mu L-M)(\lambda L-M)^{-1}=(I+(\mu-\lambda)L^L_\mu(M))^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^k(L^L_\mu(M))^k$. Отсюда $(\lambda L-M)^{-1}=(\mu L-M)^{-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^k(L^L_\mu(M))^k\to(\mu L-M)^{-1}$ при $\lambda\to\mu$. $\rhd$

УПРАЖНЕНИЕ 1.3.5. Доказать эту лемму для правой и левой L-резольвент.

ТЕОРЕМА 1.3.1. *Пусть операторы $L\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M\in\mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M аналитичны в $\rho^L(M)$.*

$\lhd$ Рассмотрим предел $\lim\limits_{\lambda\to\mu}(\mu-\lambda)^{-1}((\mu L-M)^{-1}-(\lambda L-M)^{-1})=-\lim\limits_{\lambda\to\mu}(\mu L-M)^{-1}L(\lambda L-M)^{-1}=-(\mu L-M)^{-1}L(\mu L-M)^{-1}$. Здесь мы использовали аналог тождества Гильберта и предыдущую лемму.$\rhd$

ЛЕММА 1.3.3. *Пусть $\lambda,\mu\in\rho^L(M)$, тогда*

(i) $\ker R_\lambda^L(M) = \ker L$, $\operatorname{im} R_\lambda^L(M) = \operatorname{im} R_\mu^L(M)$;

(ii) $\ker L_\lambda^L(M) = \{Mu : u \in \ker L \bigcap \operatorname{dom} M\}$, $\operatorname{im} L_\lambda^L(M) = \operatorname{im} L_\mu^L(M)$.

$\lhd$ В силу линейности оператора $(\mu L - M)^{-1}$ понятно, что $\ker L \subset \ker R_\mu^L(M)$. Обратное включение также легко получить. Пусть $0 = R_\mu^L(M)u$, тогда $Lu = (\mu L - M)0 = 0$.

Если $L_\mu^L(M)f = 0$, то $Lv = 0$, где $v = (\mu L - M)^{-1}f \in \operatorname{dom} M$. Отсюда $f = (\mu L - M)v = M(-v) = Mu$. Докажем обратное включение. $f = Mu = M(-v) = (\mu L - M)v$, $L_\mu^L(M)f = L(-u) = 0$, так как $u \in \ker L$. $\rhd$

УПРАЖНЕНИЕ 1.3.6. Доказать утверждения предыдущей леммы об образах L-резольвент с помощью тождеств (1.3.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.3. Пусть $\ker L \neq \{0\}$, вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным вектором* оператора L. Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, ...\}$ называется *цепочкой M-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q, \quad q = 0, 1, ..., \quad \varphi_l \notin \ker L \setminus \{0\}, l = 1, 2, ... \quad (1.3.5)$$

Порядковый номер вектора в цепочке будем называть его *высотой*. Условимся собственные векторы оператора L называть M-присоединенными векторами высоты 0. Линейную оболочку M-присоединенных векторов оператора L назовем его *M-корневым линеалом*. *M-корневым пространством* будем называть замкнутый M-корневой линеал оператора L.

Цепочка M-присоединенных векторов может быть бесконечной. В частности, она может быть заполнена нулями, если вектор $\varphi_0 \in \ker M \bigcap \ker L$. Но она будет конечной в случае существования такого M-присоединенного вектора φ_q, что либо $\varphi_q \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_q \notin \operatorname{im} L$.

Высоту q последнего M-присоединенного вектора в конечной цепочке $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_q\}$ будем называть *длиной* этой цепочки.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3.2. *M-корневой линеал оператора L состоит только из M-присоединенных векторов оператора L и нуля.*

$\lhd$. Пусть φ_q, ψ_r – M-присоединенные векторы оператора L высоты q и r соответственно. Покажем, что вектор $a\varphi_q + b\psi_r$, $a, b \in \mathbb{C}$, является M-присоединенным высоты $\max\{q, r\}$. Пусть $q < r$, а $\{\varphi_0, ..., \varphi_{q-1}\}$ и $\{\psi_0, ..., \psi_{r-1}\}$ – соответствующие векторам φ_q и ψ_r цепочки. Тогда в силу линейности операторов L и M $L(a\varphi_q +$

$b\psi_r) = M(a\varphi_{q-1} + b\psi_{r-1}),\ldots,\ L(a\varphi_1 + b\psi_{r-q+1}) = M(a\varphi_0 + b\psi_{r-q})$, $L(a\varphi_0 + b\psi_{r-q}) = M(0 + b\psi_{r-q-1})$, $L(b\psi_{r-q-1}) = M(b\psi_{r-q-2}),\ldots$, $L(b\psi_1) = M(b\psi_0)$. Таким образом, вектор $a\varphi_q + b\psi_r$ в цепочке, соответствующей собственному вектору $b\psi_0$ имеет высоту r.

Если $q = r$, утверждение очевидно. $\triangleright$

ЛЕММА 1.3.4. (i) *Пусть φ_q – M-присоединенный вектор оператора L высоты q, тогда*

$$-R_\mu^L(M)\varphi_q = \varphi_{q-1} + \mu\varphi_{q-2} + ... + \mu^{q-1}\varphi_0 \quad \forall \mu \in \rho^L(M); \qquad (1.3.6)$$

(ii) *Пусть ψ_q – присоединенный вектор высоты q оператора $R_\mu^L(M)$, тогда*

$$-L\psi_q = M(\psi_{q-1} + \mu\psi_{q-2} + ... + \mu^{q-1}\psi_0) \quad \forall \mu \in \rho^L(M), \qquad (1.3.7)$$

где $\psi_0 \in \ker R_\mu^L(M) \setminus \{0\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3.7. Доказать лемму методом математической индукции.

ЛЕММА 1.3.5. *Вектор φ является M-присоединенным вектором высоты не больше q оператора L точно тогда, когда* $(R_\mu^L(M))^{q+1}\varphi = 0$.

$\triangleleft$ Действительно, подействуем оператором $-R_\mu^L(M)$ на тождество (1.3.6). Тогда

$$(-R_\mu^L(M))^2\varphi_q = -R_\mu^L(M)(\varphi_{q-1} + ... + \mu^{q-1}\varphi_0) =$$
$$\varphi_{q-2} + 2\mu\varphi_{q-3} + ... + (q-1)\mu^{q-2}\varphi_0.$$

Подействовав на последнее тождество оператором $-R_\mu^L(M)$ еще $q-2$ раза, получим

$$(-R_\mu^L(M))^q\varphi_q = \varphi_0.$$

Таким образом, M-присоединенный вектор высоты q оператора L φ_q является присоединенным вектором высоты q оператора $R_\mu^L(M)$, отвечающим собственному вектору $(-1)^q\varphi_0$. Обратное утверждение показывается аналогично с использованием тождества (1.3.7). $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 1.3.8. Завершить доказательство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.4. *Правой (левой) (L,p)-резольвентой* оператора M называется операторнозначная функция $p+1$ комплексного переменного $\lambda_0, ..., \lambda_p$ с областью определения $(\rho^L(M))^{p+1}$

$$R_{(\lambda,p)}^L(M) = \prod_{k=0}^{p} R_{\lambda_k}^L(M) \quad \left(L_{(\lambda,p)}^L(M) = \prod_{k=0}^{p} L_{\lambda_k}^L(M)\right).$$

ЛЕММА 1.3.6. *Пусть* $\lambda_k, \mu_k \in \rho^L(M)$, $k = \overline{0,p}$, *тогда*

(i) $\ker R^L_{(\lambda,p)}(M)$ *есть линейная оболочка множества собственных и* M*-присоединенных высоты не большей* p *векторов оператора* L, $\operatorname{im} R^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$;

(ii) $\ker L^L_{(\lambda,p)}(M) = \{M\varphi : \varphi \in \ker R^L_{(\lambda,p)}(M) \bigcap \operatorname{dom} M\}$,
$\operatorname{im} L^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3.9. Доказать эту лемму.

ГЛАВА 2. СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ПОЛУГРУППЫ С ЯДРАМИ

2.1.Относительно p-радиальный оператор

Итак, $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$.

Обозначим через $\mathcal{U}^0$ ($\mathcal{F}^0$) ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\ker L^L_{(\mu,p)}(M)$), которое, понятно, является линейным подпространством. Обозначение корректно в силу леммы 1.3.6 (i). Через M_0 (L_0) обозначим сужение оператора M (L) на $\operatorname{dom} M_0 = \mathcal{U}^0 \cap \operatorname{dom} M$ ($\mathcal{U}^0$). Вообще говоря, пока не ясно, не является ли $\operatorname{dom} M_0$ пустым множеством.

ЛЕММА 2.1.1. $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$, $M_0 : \operatorname{dom} M_0 \to \mathcal{F}^0$.

$\triangleleft$ Возьмем $u \in \mathcal{U}^0$, $\mu \in \rho^L(M)$. По определению пространства $\mathcal{U}^0$ $(R^L_\mu(M))^{p+1}u = 0$. Отсюда $(L^L_\mu(M))^{p+1}Lu = L(R^L_\mu(M))^{p+1}u = 0$. Таким образом, вектор $L_0u \in \mathcal{F}^0$.

Далее, применив тождество (1.3.3), получим $(L^L_\mu(M))^{p+1}Mu = M(R^L_\mu(M))^{p+1}u = 0$. Поэтому $\operatorname{im} M_0 \subset \mathcal{F}^0$. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Оператор M называется *p-радиальным относительно* оператора L (короче, (L,p)-*радиальным*), если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \mu > a\ \mu \in \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu > a\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \le \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - a)^n}.$$

Покажем, что без потери общности в определении 2.1.1 можно положить $a = 0$. Действительно, для оператора $\tilde{M} = M - aL \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$ выполняется определение 2.1.1 с константой $a = 0$, так как $(\mu L - M)^{-1} = (\lambda L - \tilde{M})^{-1}$, где $\lambda = \mu - a$. А от оператора $\tilde{M}$ мы всегда можем вернуться к оператору $M = \tilde{M} + aL$. В дальнейшем поэтому будем считать, что $a = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1.1. *Пусть оператор L непрерывно обратим, а оператор $L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U})$ (или ML^{-1}) радиален. Тогда оператор M (L,p)-радиален. При $p = 0$ справедливо и обратное.*

$\triangleleft$ Все это следует из уверждения 1.3.1 и упражнения 1.3.2. При доказательстве первого из них были получены тождества

$$R_\mu(L^{-1}M) = L^{-1}R_\mu(ML^{-1})L = R^L_\mu(M),$$

$$LR_\mu(L^{-1}M)L^{-1} = R_\mu(ML^{-1}) = L^L_\mu(M).$$

Отсюда и из радиальности операторов $L^{-1}M$ и ML^{-1} (определение 1.2.3) получаем оценки:

$$\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\| \le \prod_{k=0}^{p} \|(R_{\mu_k}(L^{-1}M))^n\| \le \frac{K^{p+1}}{\prod\limits_{k=0}^{p} \mu_k^n},$$

$$\|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\| \le \prod_{k=0}^{p} \|(R_{\mu_k}(ML^{-1}))^n\| \le \frac{K^{p+1}}{\prod\limits_{k=0}^{p} \mu_k^n}.$$

Здесь мы используем тот факт, что резольвенты коммутируют. ▷

УПРАЖНЕНИЕ 2.1.1. Завершить доказательство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.2. *Слабо* (L,p)*-радиальным* оператором будем называть оператор M, для которого выполняются условие (i) и условие (ii) при $n = 1$ в определении 2.1.1.

Очевидно, что из (L,p)-радиальности оператора M следует его слабая (L,p)-радиальность. Обратное верно только при $K \le 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.1.2. Показать.

ЛЕММА 2.1.2. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда длины всех цепочек M-присоединенных векторов оператора L ограничены числом p.*

◁ Пусть φ_q – M-присоединенный вектор высоты $q = p+1$, соответствующий собственному вектору $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$. Используя леммы 1.3.5 и 1.3.6 (i), можно получить оценку

$$\|\varphi_0\|_{\mathfrak{U}} \le \|(R^L_\mu(M))^{p+1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \times \|\varphi_q\|_{\mathfrak{U}} \le \frac{K}{\mu^{p+1}}\|\varphi_q\|_{\mathfrak{U}}.$$

Устремив $\mu \to +\infty$, получим $\varphi_0 = 0$. Противоречие.▷

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда множество* $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ *совпадает с M-корневым пространством оператора L.*

◁ Чтобы убедиться в этом надо лишь вспомнить лемму 1.3.6 (i) и лемму 2.1.2. ▷

ЛЕММА 2.1.3. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда* $\ker R^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$, $\ker L^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$.

$\triangleleft$ Возьмем вектор $\varphi \in \ker R^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$. Тогда $\varphi = (R^L_\beta(M))^{p+1}\psi$ при некоторых $\beta \in \rho^L(M)$ и $\psi \in \mathcal{U}$ в силу леммы 1.3.6 (i). Следовательно, $(R^L_\beta(M))^{2p+2}\psi = 0$. Согласно лемме 1.3.5 это означает, что вектор ψ является M-присоединенным вектором оператора L высоты не больше $2p+1$. Но по лемме 2.1.2 его высота не больше p. Поэтому $(R^L_\beta(M))^{p+1}\psi = \varphi = 0$.

Пусть вектор $f \in \ker L^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$. Тогда $(L^L_\beta(M))^{p+1}g = f$ при некоторых $\beta \in \rho^L(M)$, $g \in \mathcal{F}$. Кроме того, $(L^L_\beta(M))^{p+1}f = 0$, отсюда $(L^L_\beta(M))^{2p+2}g = 0$. Поэтому $(\beta L - M)^{-1}g \in \ker(R^L_\beta(M))^{2p+2}$, т.е. M-присоединенный высоты не больше $2p+1$ вектор. Но высота его не может быть больше p. Тогда $(R^L_\beta(M))^{p+1}(\beta L - M)^{-1}g = 0$. Это означает, что $f = (\beta L - M)0 = 0$. $\triangleright$

ЛЕММА 2.1.4. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.*

$\triangleleft$ Если $\ker M_0 \neq \{0\}$, то существует вектор $\varphi_q \neq 0$, $\varphi_q \in \ker M_0$. Таким образом, по следствию 2.1.1 φ_q – M-присоединенный вектор высоты q оператора L. Так как $M\varphi_q = 0$, то в качестве следующего за φ_q M-присоединенного вектора в цепочке можно взять $\varphi_{q+1} = 0$. Продолжить цепочку можно следующим образом: $0 = \varphi_{q+2} = \varphi_{q+3} = \ldots$ Цепочка M-присоединенных векторов оператора L получилась бесконечной. Противоречие с леммой 2.1.2. Поэтому $\ker M_0 = \{0\}$. Из линейности оператора M, а следовательно и M_0, с учетом предыдущего следует, что оператор M_0 инъективен. А из определения подпространства $\mathcal{F}^0$ и леммы 1.3.6 (ii) вытекает сюръективность оператора M_0.

Из всего вышесказанного получаем, что M_0^{-1} существует, он линеен и замкнут (как обратный к линейному и замкнутому) и определен на всем пространстве $\mathcal{F}^0$. Следовательно, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.$\triangleright$

При условии слабой (L,p)-радиальности оператора M введем обозначения $H = M_0^{-1}L_0$, $J = L_0M_0^{-1}$.

ЛЕММА 2.1.1. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда операторы H и J нильпотентны степени не больше p.*

$\triangleleft$ Действительно, если $\varphi \in \mathcal{U}^0$, то в силу следствия 2.1.1 φ является собственным или M-присоединенным высоты $q \leq p$ вектором оператора L. Поэтому в силу определения относительно присоединенного вектора, лемм 2.1.1 и 2.1.4 $H^{q+1}\varphi = 0$. Значит, $H^{p+1} = \mathbb{O}$,

$J^{p+1} = M_0 H^{p+1} M_0^{-1} = \mathbb{O}$. $\triangleright$

Обозначим через $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$) замыкание линеала $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ (соответственно $\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$).

ЛЕММА 2.1.5. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\lim\limits_{\mu\to+\infty} (\mu R^L_\mu(M))^{p+1} u = u \ \forall u \in \mathcal{U}^1$;

(ii) $\lim\limits_{\mu\to+\infty} (\mu L^L_\mu(M))^{p+1} f = f \ \forall f \in \mathcal{F}^1$.

$\triangleleft$ (i) Покажем сначала, что при любом $\alpha \in \rho^L(M)$ множество $(R^L_\alpha(M))^{p+1}[\operatorname{dom} M]$ плотно в $\operatorname{im}(R^L_\alpha(M))^{p+1}$, а значит и в $\mathcal{U}^1$ (согласно лемме 1.3.6 (i)). В силу плотности линеала $\operatorname{dom} M$ для любого $u \in \mathcal{U}$ мы можем записать $u = \lim\limits_k u_k$, где $\{u_k\} \subset \operatorname{dom} M$. Тогда из непрерывности оператора $(R^L_\alpha(M))^{p+1}$ следует $v = (R^L_\alpha(M))^{p+1} u = \lim\limits_k (R^L_\alpha(M))^{p+1} u_k$, что и требовалось.

Возьмем $u = (R^L_\alpha(M))^{p+1} v$ для некоторых $\alpha \in \rho^L(M)$ и $v \in \operatorname{dom} M$. Далее,

$$(\mu R^L_\mu(M))^{p+1} u = ((I + (\mu L - M)^{-1} M)^{p+1} u =$$

$$\sum_{k=0}^{p+1} C^k_{p+1} ((\mu L - M)^{-1} M)^k u = u + w,$$

где

$$w = \sum_{k=1}^{p+1} C^k_{p+1} ((\mu L - M)^{-1} M)^k (R^L_\alpha(M))^{p+1} v =$$

$$\sum_{k=1}^{p+1} C^k_{p+1} (R^L_\mu(M))^k (R^L_\alpha(M))^{p+1-k} ((\alpha L - M)^{-1} M)^k v.$$

Здесь мы использовали тождество (1.3.3). Из определения 2.1.2 следует, что

$$\|w\|_{\mathcal{U}} \le \sum_{k=1}^{p+1} \frac{K C^k_{p+1}}{\mu^k \alpha^{p+1-k}} \|((\alpha L - M)^{-1} M)^k v\|_{\mathcal{U}}.$$

Выражение в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $\mu \to +\infty$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\mu\to+\infty} (\mu R^L_\mu(M))^{p+1} u = u$ для любого $u \in (R^L_\alpha(M))^{p+1}[\operatorname{dom} M]$. Из того, что этот линеал плотен в

$\mathcal{U}^1$, а семейство операторов $\{(\mu R^L_\mu(M))^{p+1} : \mu > 0\}$ равномерно ограничено константой K из определения 2.1.2, следует утверждение (i). $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 2.1.3. Доказать утверждение (ii) леммы.

Через $\tilde{\mathcal{U}}$ ($\tilde{\mathcal{F}}$) обозначим замыкание линеала $\mathcal{U}^0 \dot{+} \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ (линеала $\mathcal{F}^0 \dot{+} \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$). Ясно, что $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$) подпространство в $\tilde{\mathcal{U}}$ ($\tilde{\mathcal{F}}$).

ЛЕММА 2.1.6. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда* $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$.

$\triangleleft$ В силу леммы 2.1.5 существует проектор $\tilde{P} = s\text{-}\lim\limits_{\mu\to+\infty} (\mu R^L_\mu(M))^{p+1}$ ($\tilde{Q} = s\text{-}\lim\limits_{\mu\to+\infty} (\mu L^L_\mu(M))^{p+1}$) вдоль $\mathcal{U}^0$ ($\mathcal{F}^0$) на $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$).

Действительно, покажем идемпотентность $\tilde{P}$. Берем любой вектор $u \in \tilde{\mathcal{U}} : u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, $u_k = u^0_k + u^1_k$, $u^0_k \in \mathcal{U}^0$, $u^1_k \in \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$, $k = 1, 2, \ldots$ В силу непрерывности $\tilde{P}$ ($\|\tilde{P}\|_{\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}})} \le K$ по теореме 1.1.4)

$$\tilde{P}^2 u = \tilde{P} \lim_{k\to\infty} \tilde{P}(u^0_k + u^1_k) = \tilde{P} \lim_{k\to\infty} u^1_k = \lim_{k\to\infty} \tilde{P} u^1_k + \lim_{k\to\infty} \tilde{P} u^0_k$$

$$= \lim_{k\to\infty} \tilde{P}(u^1_k + u^0_k) = \tilde{P} \lim_{k\to+\infty} (u^1_k + u^0_k) = \tilde{P} u.$$

Возьмем $u = \lim\limits_{k\to\infty} (u^0_k + u^1_k) \in \ker \tilde{P}$. Тогда

$$0 = \tilde{P} u = \lim_{k\to\infty} \tilde{P}(u^0_k + u^1_k) = \lim_{k\to\infty} \tilde{P} u^1_k = \lim_{k\to\infty} u^1_k$$

в силу очевидного включения $\mathcal{U}^0 \subset \ker \tilde{P}$ и леммы 2.1.5 (i). Поэтому $u = \lim\limits_{k\to\infty} u^0_k \in \mathcal{U}^0$, так как $\mathcal{U}^0$ замкнуто. Мы получили, что $\mathcal{U}^0 = \ker \tilde{P}$.

Согласно той же лемме 2.1.5 (i) и определениям проектора $\tilde{P}$ и пространства $\mathcal{U}^1$ имеем $\operatorname{im} \tilde{P} = \mathcal{U}^1$. $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 2.1.4. Доказать утверждение леммы о расщеплении пространства $\tilde{\mathcal{F}}$.

Обозначим через $\mathcal{U}^2$ ($\mathcal{F}^2$) замыкание линеала $\operatorname{im}(R^L_\mu(M))^{p+2}$ (линеала $\operatorname{im}(L^L_\mu(M))^{p+2}$) в норме пространства $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$).

ЛЕММА 2.1.7. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда* $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^1$.

$\triangleleft$ Очевидно, что $\operatorname{im}(R^L_\mu(M))^{p+2} \subset \operatorname{im}(R^L_\mu(M))^{p+1}$, поэтому $\mathcal{U}^2 \subset \mathcal{U}^1$.

Возьмем $u \in \mathcal{U}^1$, тогда существует последовательность $\{u_k\} \subset \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ такая, что $u_k \to u$ при $k \to \infty$. Рассмотрим последовательность $\{v_k = (kR^L_k(M))^{p+1}u_k\} \subset \operatorname{im}(R^L_\mu(M))^{p+2}$ в силу леммы 1.3.6 (i). Так как $v_k - u = (kR^L_k(M))^{p+1}u_k - (kR^L_k(M))^{p+1}u + (kR^L_k(M))^{p+1}u - u$, то

$$\|v_k - u\|_{\mathcal{U}} \leq \|(kR^L_k(M))^{p+1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \times \|u_k - u\|_{\mathcal{U}} + \|(kR^L_k(M))^{p+1}u - u\|_{\mathcal{U}}.$$

В силу леммы 2.1.5 (i) и того, что $\|(kR^L_k(M))^{p+1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq K$, $k = 1, 2, ...$, получаем $\lim\limits_k v_k = u$. Это означает включение $\mathcal{U}^1 \subset \mathcal{U}^2$. ▷

УПРАЖНЕНИЕ 2.1.5. Доказать равенство $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^2$.

2.2.Существование сильно непрерывных полугрупп уравнения типа Соболева

Решением уравнения (1.2.8) назовем вектор-функцию $v \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{V})$, дифференцируемую и удовлетворяющую (1.2.8) на $\mathbb{R}_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.1. Сильно непрерывное отображение $V^\cdot : \overline{\mathbb{R}_+} \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$ называется *сильно непрерывной полугруппой разрешающих операторов* (*разрешающей полугруппой*) уравнения (1.2.8), если

(i) $V^s V^t v = V^{s+t} v$ для любых $s, t \geq 0$ и любого v из пространства $\mathcal{V}$;

(ii) $v(t) = V^t v$ есть решение уравнения (1.2.8) для любого v из плотного в $\mathcal{V}$ множества.

Полугруппа называется *равномерно ограниченной*, если

$$\exists C > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq C.$$

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Пусть оператор M (L, p)-радиален. Тогда существует равномерно ограниченная и сильно непрерывная разрешающая полугруппа уравнения (1.2.6) ((1.2.7)), рассматриваемого на подпространстве $\tilde{\mathcal{U}}$ ($\tilde{\mathcal{F}}$).*

◁ Полное доказательство очень громоздко, поэтому заметим лишь, что упомянутые полугруппы не определены вне подпространств $\tilde{\mathcal{U}}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$. Они получаются как предел аппроксимаций типа Иосиды:

$$s\text{-}\lim_{\mu \to +\infty} e^{-\frac{\mu t}{p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\mu^{p+2}}{p+1} (R^L_\mu(M))^{p+1} \right)^n = U^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}) \qquad (2.2.4),$$

$$s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty} e^{-\frac{\mu t}{p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\mu^{p+2}}{p+1} (L^L_\mu(M))^{p+1} \right)^n = F^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{F}}) \qquad (2.2.5),$$

либо как предел аппроксимаций типа Уиддера-Поста:

$$s\text{-}\lim_k \left(\left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)} = \left(\frac{k}{t} R^L_{\frac{k}{t}}(M) \right)^{k(p+1)} = \tilde{U}^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}), \tag{2.2.6}$$

$$s\text{-}\lim_k \left(L \left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} \right)^{k(p+1)} = \left(\frac{k}{t} L^L_{\frac{k}{t}}(M) \right)^{k(p+1)} = \tilde{F}^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{F}}). \tag{2.2.7}$$

Сначала показывается сходимость аппроксимаций на множествах $\operatorname{im}(R^L_\beta(M))^{p+2}$, $\operatorname{im}(L^L_\beta(M))^{p+2}$, а затем используется лемма 2.1.7 и определение подпространств $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{F}^0$.

Полугруппы (2.2.4) и (2.2.6) разрешают уравнения (1.2.2), (1.2.6), а полугруппы (2.2.5) и (2.2.7) – уравнение (1.2.7).

Единицами полугрупп являются проекторы $U^0 = \tilde{U}^0 = \tilde{P}$ вдоль $\mathcal{U}^0$ на $\mathcal{U}^1$ и $F^0 = \tilde{F}^0 = \tilde{Q}$ вдоль $\mathcal{F}^0$ на $\mathcal{F}^1$. $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 2.2.1. Показать, что если полугруппа $\{U^t : t > 0\}$ разрешающая для уравнения $L\dot{u} = \tilde{M}u$, в котором оператор $\tilde{M} = M - bL$ (L,p)-радиален с константой $a = 0$ (в определении 2.1.1), то полугруппой исходного уравнения $L\dot{u} = Mu$ будет

$$\{W^t = e^{bt} U^t : t > 0\}.$$

Соответственно, для этой полугруппы вместо равномерной ограниченности будет иметь место экспоненциальная оценка

$$\forall t > 0 \quad \|W^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \le C e^{bt}.$$

2.3.Расщепление пространств

В этом параграфе будут приведены условия, достаточные для того, чтобы $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}$, $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$.

ТЕОРЕМА 2.3.1. *Пусть пространство $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$ рефлексивно, оператор M слабо (L,p)-радиален.* Тогда $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1)$.

$\triangleleft$ Возьмем произвольный вектор $u \in \mathcal{U}$. Из слабой (L,p)-радиальности оператора M следует ограниченность последовательности векторов $\{(kR^L_k(M))^{p+1}u\}$. С учетом рефлексивности пространства $\mathcal{U}$ это дает нам возможность выбрать слабо сходящуюся к некоторому вектору v подпоследовательность $\{(k_nR^L_{k_n}(M))^{p+1}u\} \subset \mathcal{U}^1$. Из выпуклости и замкнутости множества $\mathcal{U}^1$ следует его слабая замкнутость, поэтому $v \in \mathcal{U}^1$.

Заметим, что непрерывность оператора $(R^L_\mu(M))^{p+1}$, $\mu > 0$, влечет его непрерывность в слабой топологии. Отсюда

$$(R^L_\mu(M))^{p+1} w\text{-}\lim_n (I - (k_nR^L_{k_n}(M))^{p+1})u =$$

$$w\text{-}\lim_n (R^L_\mu(M))^{p+1}(I - (k_nR^L_{k_n}(M))^{p+1})u =$$

$$w\text{-}\lim_n (I - (k_nR^L_{k_n}(M))^{p+1})(R^L_\mu(M))^{p+1}u = 0.$$

Поэтому вектор $z = w\text{-}\lim\limits_n (I - (k_nR^L_{k_n}(M))^{p+1})u \in \mathcal{U}^0$.

Представим u в виде $u = (k_nR^L_{k_n}(M))^{p+1}u + (I - (k_nR^L_{k_n}(M))^{p+1})u$. Перейдем к слабому пределу при $n \to \infty$ и получим $u = z + v$, где $z \in \mathcal{U}^0$, $v \in \mathcal{U}^1$. $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 3.1.1. Доказать утверждение теоремы о пространстве $\mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.1. Оператор M называется *сильно* (L,p)-*радиальным справа* (*слева*), если он (L,p)-радиален и

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{const(u)}{\lambda \prod_{k=0}^p \mu_k} \quad \forall u \in \operatorname{dom} M$$

(существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{const(f)}{\lambda \prod_{k=0}^p \mu_k} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}})$$

при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, ..., \mu_p > 0$.

ТЕОРЕМА 2.3.2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален справа (слева). Тогда $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$).*

$\triangleleft$ Пусть $u \in \operatorname{dom} M$. Тогда имеем

$$(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u - (\lambda R^L_\lambda(M))^{p+1}u =$$

$$\sum_{k=0}^p ((\mu R^L_\mu(M))^{p+1-k}(\lambda R^L_\lambda(M))^k - (\mu R^L_\mu(M))^{p-k}(\lambda R^L_\lambda(M))^{k+1})u =$$

$$\sum_{k=0}^{p}(\mu R_\mu^L(M))^{p-k}(\lambda R_\lambda^L(M))^k(\mu R_\mu^L(M)-\lambda R_\lambda^L(M))u=$$

$$\sum_{k=0}^{p}(\mu R_\mu^L(M))^{p-k}(\lambda R_\lambda^L(M))^k((\mu-\lambda)R_\mu^L(M)+\lambda(R_\mu^L(M)-R_\lambda^L(M)))u=$$

$$\sum_{k=0}^{p}(\mu R_\mu^L(M))^{p-k}(\lambda R_\lambda^L(M))^k(\mu-\lambda)R_\mu^L(M)(I-\lambda R_\lambda^L(M))u=$$

$$(\lambda-\mu)\sum_{k=0}^{p}\mu^{p-k}\lambda^k(R_\mu^L(M))^{p+1-k}(R_\lambda^L(M))^k(\lambda L-M)^{-1}Mu$$

с использованием тождества (1.3.2). Отсюда

$$\|(\mu R_\mu^L(M))^{p+1}u-(\lambda R_\lambda^L(M))^{p+1}u\|_{\mathcal{U}}\le const(u)|\mu^{-1}-\lambda^{-1}|$$

в силу определения 2.3.1. Предел

$$Pu=\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R_\mu^L(M))^{p+1}u\quad\forall u\in\operatorname{dom}M$$

существует по критерию Коши в банаховом пространстве. Из того, что $\overline{\operatorname{dom}M}=\mathcal{U}$, а семейство операторов $\{(\mu R_\mu^L(M))^{p+1}:\mu>0\}$ в силу (L,p)-радиальности оператора M равномерно ограничено, следует, что $P\in\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

То, что P – проектор вдоль $\mathcal{U}^0$ на $\mathcal{U}^1$ мы показывали в лемме 2.1.6. ▷

УПРАЖНЕНИЕ 3.1.2. Доказать утверждение теоремы относительно существования проектора

$$Q=s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L_\mu^L(M))^{p+1}.$$

Ясно, что при условии сильной (L,p)-радиальности оператора M справа (слева) разрешающая полугруппа уравнения (2.2.1) ((2.2.2)) задана на всем пространстве $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$, а ее единицей является проектор P (Q).

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1. *Пусть оператор M сильно (L,p) -радиален справа и слева. Тогда*

(i) $LP=QL$;

(ii) $\forall u\in\operatorname{dom}M$ $Pu\in\operatorname{dom}M$ и $MPu=QMu$.

$\triangleleft$ Соотношение

$$M(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u = (\mu L^L_\mu(M))^{p+1}Mu \quad \forall u \in \operatorname{dom} M \tag{2.3.1}$$

(с учетом тождества (1.3.3)) очевидно. Из него видно, что в соответствии с предыдущей теоремой существуют пределы

$$\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u = Pu \quad \text{и}$$

$$\lim_{\mu\to+\infty} M(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u = QMu \quad \forall u \in \operatorname{dom} M.$$

Устремим в (2.3.1) $\mu \to +\infty$ и в силу замкнутости оператора M получим утверждение (ii).

Утверждение (i) доказывается аналогично с использованием непрерывности оператора L. $\triangleright$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3.1. *Пусть оператор L непрерывно обратим, а оператор $S = L^{-1}M$ радиален. Тогда оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева.*

$\triangleleft$ Действительно, возьмем $\overset{\circ}{\mathcal{F}} = L[\operatorname{dom} M]$. Покажем плотность этого линеала в $\mathcal{F}$. Пусть $f \in \mathcal{F}$, тогда вследствие непрерывной обратимости L, а значит и его сюръективности, $\exists u \in \mathcal{U}$ $f = Lu = L\lim\limits_k u_k = \lim\limits_k Lu_k$, где $\{u_k\} \subset \operatorname{dom} M$. Здесь мы использовали плотность $\operatorname{dom} M$ и непрерывность оператора L.

Далее, $\forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$ $L^{-1}f \in \operatorname{dom} S = \operatorname{dom} M$. Как при доказательстве утверждения 1.3.1 получаем

$$M(\lambda L - M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f = M(\lambda I - S)^{-1}\prod_{k=0}^{p}(\mu_k I - S)^{-1}L^{-1}f =$$

$$LS(\lambda I - S)^{-1}\prod_{k=0}^{p}(\mu_k I - S)^{-1}L^{-1}f = L(\lambda I - S)^{-1}\prod_{k=0}^{p}(\mu_k I - S)^{-1}SL^{-1}f.$$

Поэтому по причине радиальности S

$$\|M(\lambda L - M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f\|_{\mathcal{F}} \le \frac{K\|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})}\|SL^{-1}f\|_{\mathcal{U}}}{\lambda\prod\limits_{k=0}^{p}\mu_k}.$$

(L,p)-радиальность оператора M для этого случая показывалась ранее. $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 2.3.1. Показать (L,p)-радиальность справа оператора M в условиях утверждения 2.3.1.

Обозначим через L_1 (M_1) сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{U}^1 \cap \operatorname{dom} M = \operatorname{dom} M_1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3.2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева. Тогда*

(i) $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$;

(ii) $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$;

(iii) $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$.

$\triangleleft$ В силу теоремы 2.3.2 $u \in \mathcal{U}^1$ $(f \in \mathcal{F}^1)$ тогда и только тогда, когда $u = Pu$ $(f = Qf)$. Возьмем $u \in \mathcal{U}^1$ $(u \in \operatorname{dom} M_1)$. Согласно следствию 2.3.1

$$Lu = LPu = QLu \quad (Mu = MPu = QMu).$$

Поэтому $Lu \in \mathcal{F}^1 \quad (Mu \in \mathcal{F}^1)$.

Осталось показать, что $\overline{\operatorname{dom} M_0} = \mathcal{U}^0$, $\overline{\operatorname{dom} M_1} = \mathcal{U}^1$.

В силу следствия 2.3.1 для любого $u_k \in \operatorname{dom} M$ $Pu_k \in \operatorname{dom} M_1$. Так как линеал $\operatorname{dom} M$ плотен в пространстве $\mathcal{U}$, для любого $u \in \mathcal{U}$, в частности для $u = Pu \in \mathcal{U}^1$, существует последовательность $\{u_k\} \subset \operatorname{dom} M$ такая, что $u_k \to u$ при $k \to \infty$. Поэтому $Pu_k \to Pu = u$.

Плотность $\operatorname{dom} M_0$ показывается аналогично с использованием проектора $(I-P)$. Используя лемму 2.1.1, получаем утверждение (ii). $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 2.3.2. Завершить подробное доказательство предыдущего следствия.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3.3. Показать, что на самом деле для того, чтобы оператор L_1 действовал в пространство $\mathcal{F}^1$, не нужно даже слабой (L,p)-радиальности оператора M.

2.4.Обратный оператор

В этом параграфе будут приведены условия, при которых существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.1. Оператор M называется *сильно* (L,p)-*радиальным*, если он сильно (L,p)-радиален слева и

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})}\le \frac{K}{\lambda\prod\limits_{k=0}^{p}\mu_k}\quad \forall\lambda,\mu_0,...,\mu_p>0.$$

Понятно, что сильно (L,p)-радиальный оператор M сильно (L,p)-радиален справа. Действительно, возьмем $u\in\operatorname{dom}M$. Тогда

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}Mu\|_{\mathcal{U}}\le$$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})}\times\|Mu\|_{\mathcal{F}}\le\frac{K\|Mu\|_{\mathcal{F}}}{\lambda\prod_{k=0}^{p}\mu_k}\quad\forall\lambda,\mu_0,...,\mu_p>0.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4.1. *Пусть оператор L непрерывно обратим, а оператор $L^{-1}M\in\mathcal{C}l(\mathcal{U})$ радиален. Тогда оператор M сильно (L,p)-радиален.*

$\lhd$ Утверждение доказывается аналогично и при помощи утверждения 2.3.1 и тождества

$$R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}=\prod_{k=0}^{p}R_{\mu_k}(L^{-1}M)\times R_\lambda(L^{-1}M)L^{-1}.$$

$\rhd$

ТЕОРЕМА 2.4.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда существует оператор $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.*

$\lhd$ Пусть $f\in\operatorname{im}L^L_{(\mu,p)}(M)$, т.е. $f=(L^L_\beta(M))^{p+1}g$ при некоторых $\beta>0$ и $g\in\mathcal{F}$. Тогда, рассуждая так же, как в теореме 2.3.2, получим

$$\mu^{p+2}(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L-M)^{-1}f-\lambda^{p+2}(R^L_\lambda(M))^{p+1}(\lambda L-M)^{-1}f=$$

$$((\mu R^L_\mu(M))^{p+1}-(\lambda R^L_\lambda(M))^{p+1})\mu(\mu L-M)^{-1}f+$$

$$(\lambda R^L_\lambda(M))^{p+1}(\mu(\mu L-M)^{-1}-\lambda(\lambda L-M)^{-1})f=$$

$$(\lambda-\mu)\sum_{k=0}^{p}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1-k}(\lambda R^L_\lambda(M))^k(\lambda L-M)^{-1}M(\mu L-M)^{-1}f+$$

$$(\lambda R^L_\lambda(M))^{p+1}((\mu-\lambda)(\mu L-M)^{-1}+\lambda((\mu L-M)^{-1}-(\lambda L-M)^{-1}))f=$$

$$(\lambda-\mu)\sum_{k=0}^{p+1}(\mu R_\mu^L(M))^{p+1-k}(\lambda R_\lambda^L(M))^k(\lambda L-M)^{-1}M(\mu L-M)^{-1}f=$$

$$(\lambda-\mu)\sum_{k=0}^{p+1}(\mu R_\mu^L(M))^{p+1-k}(\lambda R_\lambda^L(M))^k(\lambda L-M)^{-1}\times$$

$$L_\mu^L(M)(L_\beta^L(M))^pM(\beta L-M)^{-1}g.$$

Отсюда вследствие сильной (L,p)-радиальности оператора M

$$\|\mu^{p+2}(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L-M)^{-1}f-\lambda^{p+2}(R_\lambda^L(M))^{p+1}(\lambda L-M)^{-1}f\|_{\mathcal{U}}\leq$$

$$|\mu-\lambda|\sum_{k=0}^{p+1}\mu^{p+1-k}\lambda^k\|(R_\mu^L(M))^{p+1-k}(R_\lambda^L(M))^k(\lambda L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})}\times$$

$$\|L_\mu^L(M)(L_\beta^L(M))^p\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\times\|M(\beta L-M)^{-1}g\|_{\mathcal{F}}\leq$$

$$|\mu-\lambda|\sum_{k=0}^{p+1}\frac{K^2}{\lambda\mu\beta^p}\|M(\beta L-M)^{-1}g\|_{\mathcal{F}}\leq const(f)|\mu^{-1}-\lambda^{-1}|.$$

Поэтому существует предел фундаментальной последовательности

$$\hat{L}_1^{-1}f=\lim_{\mu\to+\infty}\mu^{p+2}(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L-M)^{-1}f$$

при любом $f\in\operatorname{im}L_{(\mu,p)}^L(M)$. Поскольку линеал $\operatorname{im}L_{(\mu,p)}^L(M)$ плотен в $\mathcal{F}^1$, а семейство операторов $\{\mu^{p+2}(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L-M)^{-1}:\mu>0\}$ равномерно ограничено константой K по причине сильной (L,p)-радиальности оператора M, то существует оператор

$$\hat{L}_1^{-1}=s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}L_\mu^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1),$$

где оператор $L_\mu^{-1}=\mu^{p+2}(R_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}(\mu L_1-M_1)^{-1}$. Здесь мы использовали следствие 2.3.2.

Докажем, что $\hat{L}_1^{-1}L_1=I$. Возьмем $u=(R_\beta^L(M))^{p+1}v$ при некоторых $\beta>0$, $v\in\operatorname{dom}M$. Получим, как в лемме 2.1.5,

$$L_\mu^{-1}L_1u=(\mu R_\mu^L(M))^{p+2}u=(I+(\mu L-M)^{-1}M)^{p+2}u=$$

$$\sum_{k=0}^{p+2}C_{p+2}^k((\mu L-M)^{-1}M)^ku=$$

$$u + \sum_{k=1}^{p+1} C_{p+2}^{k} (R_{\mu}^{L}(M))^{k} (R_{\beta}^{L}(M))^{p+1-k} w_k +$$
$$(R_{\mu}^{L}(M))^{p+1} (\mu L - M)^{-1} M w_{p+1},$$
где $w_k = ((\beta L - M)^{-1} M)^k v$. Вследствие сильной (L,p)-радиальности оператора M

$$\|L_{\mu}^{-1} L_1 u - u\|_{\mathcal{U}} \leq \sum_{k=1}^{p+1} C_{p+2}^{k} \frac{K}{\mu^k \beta^{p+1-k}} \|w_k\|_{\mathcal{U}} + \frac{K}{\mu^{p+2}} \|M w_{p+1}\|_{\mathcal{F}} \to 0$$

при $\mu \to +\infty$, кроме того семейство операторов $\{L_{\mu}^{-1} L_1 : \mu > 0\}$ равномерно ограничено константой $K\|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})}$. А так как $\mathcal{U}^1 = \overline{R_{(\mu,p)}^{L}(M)[\operatorname{dom} M]}$ (показано в лемме 2.1.5), то по теореме Банаха-Штейнгауза $\hat{L}_1^{-1} L_1 u = u$ для любого $u \in \mathcal{U}^1$.

Аналогично доказывается, что $L_1 \hat{L}_1^{-1} = I_{\mathcal{F}^1}$. Значит, оператор $\hat{L}_1^{-1} = L_1^{-1}$ (обратный к L_1). $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 2.4.1. Завершить доказательство теоремы.

2.5.Инфинитезимальные генераторы

Сужение $\{U_1^t : t \geq 0\}$ ($\{F_1^t : t \geq 0\}$) полугруппы $\{U^t : t \geq 0\}$ ($\{F^t : t \geq 0\}$) на подпространство $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$) является невырожденной сильно непрерывной полугруппой, так как, например, $U^0\Big|_{\mathcal{U}^1} = P\Big|_{\mathcal{U}^1} = I_{\mathcal{U}^1}$.

Введем следующие обозначения

$$S_1 = L_1^{-1} M_1 : \operatorname{dom} S_1 \to \mathcal{U}^1, \quad \operatorname{dom} S_1 = \operatorname{dom} M_1,$$
$$T_1 = M_1 L_1^{-1} : \operatorname{dom} T_1 \to \mathcal{F}^1, \quad \operatorname{dom} T_1 = L_1[\operatorname{dom} M_1]$$

при условии сильной (L,p)-радиальности оператора M.

ТЕОРЕМА 2.5.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда инфинитезимальным генератором полугруппы $\{U_1^t : t \geq 0\}$ ($\{F_1^t : t \geq 0\}$) является оператор S_1 (T_1).*

$\triangleleft$ Доказательство этой теоремы опирается на пропущенное в силу чрезвычайной громоздкости доказательство теоремы 2.2.1 и само по себе достаточно сложно и громоздко. $\triangleright$

Поскольку речь зашла о невырожденных полугруппах, применив результаты классической теории полугрупп, сразу получим следующие следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2.5.1. *В условиях теоремы* 2.5.1 *операторы* S_1 *и* T_1 *радиальны.*

Этот факт сразу следует из теоремы Хилле – Иосиды – Феллера – Филлипса – Миядеры.

СЛЕДСТВИЕ 2.5.2. *В условиях теоремы* 2.5.1 $\{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\mu > 0\} \subset \rho^L(M)$.

$\lhd$ Возьмем μ из правой полуплоскости, тогда

$$(\mu L - M)^{-1} f = (\mu L_0 - M_0)^{-1}(I - Q)f + (\mu L_1 - M_1)Qf =$$
$$(\mu M_0^{-1} L_0 - I)^{-1} M_0^{-1}(I - Q)f + (\mu I - L_1^{-1} M_1)^{-1} L_1^{-1} f =$$
$$(\mu H - I)^{-1} M_0^{-1}(I - Q)f + (\mu I - S_1)^{-1} L_1^{-1} f =$$
$$\sum_{k=0}^{p} \mu^k H^k M_0^{-1}(I - Q)f + (\mu I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q f =$$
$$\sum_{k=0}^{p} \mu^k H^k M_0^{-1}(I - Q)f + \int\limits_0^\infty e^{-\mu t} U^t L_1^{-1} Q f dt \quad \forall f \in \mathcal{F} \tag{2.5.4}$$

согласно нильпотентности H и теореме 2.5.1. $\rhd$

Используя тот факт, что для любого $u \in \mathcal{U}$ $U^t u = U_1^t P u$, получим

СЛЕДСТВИЕ 2.5.3. *В условиях теоремы* 2.5.1 *полугруппа* $\{U^t : t \geq 0\}$ ($\{F^t : t \geq 0\}$) *представима в виде*

$$U^t u = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{\mu t} R_\mu(S_1) P u d\mu \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

$$(F^t f = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{\mu t} R_\mu(T_1) Q f d\mu \quad \forall f \in \mathcal{F})$$

$\forall t > 0 \ \forall \gamma > 0$.

Из теоремы 2.5.1 следует, что если бы мы ввели в рассмотрение понятие сильно p-радиального оператора S ($S = M$, $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, $L = I$ в определении 2.4.1), то оно совпало бы с понятием радиального оператора. Действительно, тогда собственных векторов , а значит и M-присоединенных, у оператора L нет. Т.е. $\mathcal{U}^0 = \{0\}$. Поэтому $\mathcal{U} = \mathcal{U}^1$ по теореме 2.3.2. Тогда оператор $S_1 = I^{-1}M_1 = M = S$. Согласно следствию 2.5.1, сильно p-радиальный оператор S радиален. Обратное утверждение очевидно.

2.6.Генераторы сильно непрерывных полугрупп операторов с ядрами

Здесь мы получим результаты, обратные результатам, полученным в предыдущих параграфах этой главы. Для этого в терминах полугрупп выделим пять условий, следующих из сильной (L,p)-радиальности оператора M. А затем мы покажем, что эти условия достаточны для сильной p-радиальности оператора M относительно оператора L. Иначе, если до этого по паре операторов мы строили пару полугрупп, то в этом параграфе мы по паре полугрупп построим пару операторов.

Если оператор L непрерывно обратим, результаты, изложенные ниже, превращаются в классический результат о генераторе сильно непрерывной невырожденной полугруппы.

(A1) *Существуют две сильно непрерывные и равномерно ограниченные полугруппы* $\{U^t : t \geq 0\}$ *и* $\{F^t : t \geq 0\}$ *операторов* $U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $F^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$.

Положим $P = U^0$, $Q = F^0$. Согласно полугрупповому свойству P и Q – проекторы. Введем обозначения: $\mathcal{U}^0 = \ker P$, $\mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathcal{F}^0 = \ker Q$, $\mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q$; имеем $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$. Через $\{U_1^t : t \geq 0\}$ и $\{F_1^t : t \geq 0\}$ обозначим сужения соответствующих полугрупп на подпространства $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$. Сужения являются невырожденными полугруппами, и по теореме Хилле – Иосиды – Феллера – Филлипса – Миядеры они имеют инфинитезимальные генераторы, которые мы обозначим S_1 и T_1 соответственно. По классической теории они являются радиальными операторами.

(A2) *Существует линейный гомеоморфизм* $L_1 : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1$ *такой, что* $L_1 S_1 = T_1 L_1$.

(Последнее равенство предполагает, что $L_1[\operatorname{dom} S_1] = \operatorname{dom} T_1$).

(A3) *Существует биективный оператор* $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$.

Из биективности следует существование оператора $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.

(A4) *Существует оператор* $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$ *такой, что оператор* $H = M_0^{-1} L_0$ *нильпотентен степени не больше* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$(A5) \quad L = L_0(I - P) + L_1 P \quad M = M_0(I - P) + L_1 S_1 P \qquad ,$$

$$\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} M_0 \dot{+} \operatorname{dom} S_1.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.6.1. Показать, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

ТЕОРЕМА 2.6.1. . *Оператор* M *сильно* (L, p)*-радиален тогда и только тогда, когда выполнены все условия (A1)-(A5).*

$\lhd$ То, что условия (A1)-(A5) следуют из сильной (L, p)-радиальности оператора M показано в предыдущих параграфах этой главы.

Покажем обратное. Пусть $\mu > 0$, тогда

$$(\mu L - M)^{-1} = (\mu L_0 - M_0)^{-1}(I - Q) + (\mu L_1 - L_1 S_1)^{-1} Q =$$
$$(\mu M_0^{-1} L_0 - I)^{-1} M_0^{-1}(I - Q) + (\mu I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q =$$
$$(\mu H - I)^{-1} M_0^{-1}(I - Q) + (\mu I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q =$$
$$-\sum_{k=0}^{p} \mu^k H^k M_0^{-1}(I - Q) + (\mu I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q.$$

Аналогично получим тождества

$$R_\mu^L(M) = -H \sum_{k=0}^{p} \mu^k H^k (I - P) + (\mu I - S_1)^{-1} P,$$

$$(R_{(\mu,p)}^L(M))^n = \mathbb{O}(I - P) + \prod_{k=0}^{p} (R_{\mu_k}(S_1))^n P,$$

$$L_\mu^L(M) = J(\mu J - I)^{-1}(I - Q) + (\mu I - T_1)^{-1} Q =$$
$$-J \sum_{k=0}^{p} \mu^k J^k (I - Q) + (\mu I - T_1)^{-1} Q,$$

$$(L_{(\mu,p)}^L(M))^n = \mathbb{O}(I - Q) + \prod_{k=0}^{p} (R_{\mu_k}(T_1))^n Q,$$

где $\mu_k > 0$, $k = \overline{0, p}$, а оператор $J = L_0 M_0^{-1} = M_0 H M_0^{-1}$ нильпотентен степени не больше p, что следует из условия (A4). Кроме нильпотентности операторов H и J здесь мы также воспользовались тем, что резольвенты коммутируют. Далее,

$$R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1} = \mathbb{O}(I-Q) + \prod_{k=0}^{p}(\mu_k I - S_1)^{-1}(\lambda I - S_1)^{-1}L_1^{-1}Q,$$

$$M(\lambda L-M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f = \mathbb{O}(I-Q)f + (\lambda I - T_1)^{-1}\prod_{k=0}^{p}(\mu_k I - T_1)^{-1}T_1 Q f,$$

так как оператор T_1 коммутирует со своей резольвентой. Вектор f мы берем из линеала $\overset{\circ}{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \dot{+} \operatorname{dom} T_1$, который плотен в $\mathcal{F}$, так как $\overline{\operatorname{dom} T_1} = \mathcal{F}^1$.

Из указанных соотношений и радиальности операторов S_1 и T_1 следует утверждение теоремы. $\triangleright$

ГЛАВА 3. СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ С ЯДРАМИ

3.1.Относительно бирадиальный оператор

Эта глава очень похожа на предыдущую, поэтому многие доказательства мы оставляем читателю для упражнений, подразумевая, что они аналогичны соответствующим доказательствам во второй главе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. Оператор M называется *p-бирадиальным* относительно оператора L (короче, (L,p)-*бирадиальным*), если

$$(i) \quad \exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow \quad (\mu \in \rho^L(M));$$

$$(ii) \quad \exists K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow$$

$$\max\left\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \quad \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\right\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^{p}(|\mu_k| - a)^n}.$$

В данном определении, в отличие от определения относительно p-радиального оператора M, константу a положить равной нулю без ограничения общности мы не можем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1.1. *Пусть оператор L непрерывно обратим, а оператор $L^{-1}M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{U})$ бирадиален. Тогда оператор M (L,p)-бирадиален. При $p = 0$ справедливо и обратное.*

УПРАЖНЕНИЕ 3.1.1. Провести доказательство утверждения 3.1.1 аналогичное доказательству утверждения 2.1.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.2. *Слабо (L,p)-бирадиальным* оператором будем называть оператор M, для которого выполняются условие (i) и условие (ii) при $n = 1$ в определении 3.1.1.

Из (L,p)-бирадиальности оператора M следует его слабая (L,p)-бирадиальность. Обратное верно при $K \leq 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1.2. *Из (L,p)-бирадиальности (слабой (L,p)-бирадиальности) оператора M следует (L,p)-радиальность (слабая (L,p)-радиальность) операторов M и $-M$.*

$\lhd$ Убедимся в этом в случае с оператором $-M$. Для этого достаточно привести тождество

$$(\mu L - M)^{-1} = -(-\mu L - (-M))^{-1}.$$

Из него следует, что спектры операторов M и $-M$ симметричны друг другу относительно начала координат. Дальше утверждение проверяется непосредственно. $\triangleright$

Отсюда, с учетом результатов предыдущей главы, сразу следует

ЛЕММА 3.1.1. *Пусть оператор M слабо (L, p)-бирадиален. Тогда*

(i) *длины всех цепочек M-присоединенных векторов оператора L ограничены числом p;*

(ii) *множество* $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ *совпадает с M-корневым пространством оператора L;*

$$\text{(iii)} \ker R^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\},$$
$$\ker L^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\};$$

(iv) *существует оператор* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0, \mathcal{U}^0)$;

(v) *операторы* $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$ *и* $J = L_0 M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0)$ *нильпотентны степени не больше p.*

Как и прежде, через $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$ обозначим замыкание множества $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ $(\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M))$ в норме пространства $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$.

ЛЕММА 3.1.2. *Пусть оператор M слабо (L, p)-бирадиален. Тогда*

$$(i) \quad \lim_{|\mu|\to\infty} (\mu R^L_\mu(M))^{p+1} u = u \quad \forall u \in \mathcal{U}^1;$$

$$(ii) \quad \lim_{|\mu|\to\infty} (\mu L^L_\mu(M))^{p+1} f = f \quad \forall f \in \mathcal{F}^1.$$

$\triangleleft$ Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 2.1.5. Надо лишь заметить, что согласно определению 3.1.2 константой $2^{p+1}K$ равномерно ограничено семейство $\{(\mu R^L_\mu(M))^{p+1} : |\mu| > 2a\}$. Действительно,

$$\|(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}\| \leq \frac{|\mu|^{p+1}K}{(|\mu| - a)^{p+1}} = \frac{K}{(1 - \frac{a}{|\mu|})^{p+1}} \leq \frac{K}{(1 - 1/2)^{p+1}}.$$

Поэтому применение теоремы Банаха-Штейнгауза также возможно. $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 3.1.2. Провести полное доказательство леммы.

Через $\tilde{\mathcal{U}}$ $(\tilde{\mathcal{F}})$ обозначим замыкание множества $\mathcal{U}^0 \dot{+} \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ $(\mathcal{F}^0 \dot{+} \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M))$. $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$ – подпространство в $\tilde{\mathcal{U}}$ $(\tilde{\mathcal{F}})$. Из утверждения 3.1.2 вытекает следующая

ЛЕММА 3.1.3. *Пусть оператор M слабо (L,p)-бирадиален. Тогда* $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1, \quad \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$.

Так же, как при доказательстве леммы 2.1.6, надо лишь расщепить подпространство $\tilde{\mathcal{U}}$ ($\tilde{\mathcal{F}}$) проектором $s\text{-}\lim_{|\mu|\to\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1} = \tilde{P}$ ($s\text{-}\lim_{|\mu|\to\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1} = \tilde{Q}$).

Через $\mathcal{U}^2$ ($\mathcal{F}^2$) обозначим замыкание линеала $\operatorname{im}(R^L_\mu(M))^{p+2}$ (соответственно $\operatorname{im}(L^L_\mu(M))^{p+2}$).

ЛЕММА 3.1.4. *Пусть оператор M слабо (L,p)-бирадиален. Тогда* $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^1$.

Последние две леммы доказываются так же, как аналогичные леммы во второй главе. Разница лишь в том, что мы говорим о равномерной ограниченности семейства $\{(\mu R^L_\mu(M))^{p+1} : |\mu| > 2a\}$ константой $2^{p+1}K$, как при доказательстве леммы 3.1.2.

УПРАЖНЕНИЕ 3.1.3. Доказать леммы 3.1.3 и 3.1.4.

3.2.Существование сильно непрерывных групп уравнения типа Соболева

Решением уравнения (1.2.8) назовем удовлетворяющую ему вектор-функцию $v \in C^1(\mathbb{R};\mathcal{V})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.1. Сильно непрерывное отображение $V^\cdot : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$ называется *сильно непрерывной группой разрешающих операторов (разрешающей группой)* уравнения (1.2.8), если

(i) $\quad \forall v \in \mathcal{V} \quad \forall s,t \in \mathbb{R} \quad V^sV^tv = V^{s+t}v$;

(ii) $\quad v(t) = V^tv$ есть решение уравнения (1.2.8) для любого v из плотного в $\mathcal{V}$ линеала.

Группа называется *экспоненциально ограниченной*, если

$$\exists \omega \geq 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq Ce^{\omega|t|}.$$

ТЕОРЕМА 3.2.1. *Пусть оператор M (L,p)-бирадиален. Тогда существует экспоненциально ограниченная сильно непрерывная разрешающая группа уравнения (1.2.6) ((1.2.7)), рассматриваемого на подпространстве $\tilde{\mathcal{U}}$ ($\tilde{\mathcal{F}}$).*

$\triangleleft$ Из утверждения 3.1.2 и теоремы 2.2.1 следует существование полугрупп

$$U^t_+ = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty} e^{-\frac{(\mu-a)}{p+1}t+at} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{(\mu-a)^{p+2}}{p+1} (R^L_\mu(M))^{p+1} \right)^n, \quad t \geq 0,$$

$$F_+^t = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty} e^{-\frac{(\mu-a)}{p+1}t+at}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\frac{(\mu-a)^{p+2}}{p+1}(L_\mu^L(M))^{p+1}\right)^n, \quad t\geq 0,$$

уравнений (1.2.6) и (1.2.7) и полугрупп

$$U_-^t = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty} e^{-\frac{(\mu-a)}{p+1}t+at}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\frac{(\mu-a)^{p+2}}{p+1}(R_\mu^L(-M))^{p+1}\right)^n =$$

$$s\text{-}\lim_{\mu\to-\infty} e^{-\frac{(\mu+a)}{p+1}\tau-a\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}\left(\frac{(\mu+a)^{p+2}}{p+1}(R_\mu^L(M))^{p+1}\right)^n, \quad \tau=-t\leq 0,$$

$$F_-^t = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty} e^{-\frac{(\mu-a)}{p+1}t+at}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\frac{(\mu-a)^{p+2}}{p+1}(L_\mu^L(-M))^{p+1}\right)^n =$$

$$s\text{-}\lim_{\mu\to-\infty} e^{-\frac{(\mu+a)}{p+1}\tau-a\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}\left(\frac{(\mu+a)^{p+2}}{p+1}(L_\mu^L(M))^{p+1}\right)^n, \quad \tau=-t\leq 0,$$

уравнений

$$R_\alpha^L(-M)\frac{du}{dt} = -(\alpha L+M)^{-1}Mu \quad \text{и} \quad L_\alpha^L(-M)\frac{df}{dt} = -M(\alpha L+M)^{-1}f$$

соответственно.

Единицами их будут проектор $U_+^0 = U_-^0 = \tilde{P}$ на $\mathcal{U}^1$ вдоль $\mathcal{U}^0$ для первой и третьей полугруппы и проектор $F_+^0 = F_-^0 = \tilde{Q}$ на $\mathcal{F}^1$ вдоль $\mathcal{F}^0$ соответственно для второй и четвертой полугруппы, как и в теореме 2.2.1.

Покажем, что семейства операторов

$$\{U^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}) : U^t = U_+^t, \quad t\geq 0; \quad U^t = U_-^{-t}, \quad t<0\}$$

и

$$\{F^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{F}}) : F^t = F_+^t, \quad t\geq 0; \quad F^t = F_-^{-t}, \quad t<0\}$$

являются экспоненциально ограниченными и сильно непрерывными группами.

Рассмотрим оператор $G^t = U_+^tU_-^t$. Возьмем $u\in \operatorname{im}(R_\beta^L(M))^{p+2}$. При доказательстве теоремы 2.2.1 показывается, что при таких u

$$R_\alpha^L(M)\frac{d}{dt}G^tu = (\alpha L-M)^{-1}MU_+^tU_-^tu + R_\alpha^L(M)U_+^t\frac{d}{dt}U_-^tu =$$

$$(\alpha L-M)^{-1}MU_+^tU_-^tu + U_+^tR_\alpha^L(M)\frac{d}{dt}U_-^tu =$$

$$(\alpha L-M)^{-1}MU_+^tU_-^tu-U_+^tR_{-\alpha}^L(-M)\frac{d}{dt}U_-^tu=$$
$$(\alpha L-M)^{-1}MU_+^tU_-^tu-U_+^t(-\alpha L+M)^{-1}(-M)U_-^tu=$$
$$(\alpha L-M)^{-1}MU_+^tU_-^tu-U_+^t(\alpha L-M)^{-1}MU_-^tu=$$
$$(\alpha L-M)^{-1}MU_+^tU_-^tu-(\alpha L-M)^{-1}MU_+^tU_-^tu=0.$$

Здесь мы использовали правило дифференцирования композиции операторнозначных функций $\frac{d}{dt}(A(t)B(t))=\frac{dA(t)}{dt}B(t)+A(t)\frac{dB(t)}{dt}$ и коммутирование операторов $R_\alpha^L(M)$ и $(\alpha L-M)^{-1}M$ с U_+^t и U_-^t, которое следует из построения полугрупп. Итак, $G^tu=\mathrm{const}=G^0u=u$ при всех $u\in\mathrm{im}(R_\beta^L(M))^{p+2}\subset\mathcal{U}^1$.

Полугруппы экспоненциально ограничены, т.е. $\|U_+^t\|\leq Ke^{|a|t}$, $\|U_-^t\|\leq Ke^{|a|t}$, поэтому $\|G^t\|\leq K^2e^{2|a|t}$. Таким образом, на любом конечном отрезке $[0,T]$ операторы G^t равномерно ограничены. Следовательно, используя теорему Банаха-Штейнгауза, тождество $G^tu=u$ можно распространить на все подпространство $\mathcal{U}^1$, если учесть лемму 3.1.4. По построению полугрупп $G^tu=0$ при $u\in\mathcal{U}^0$. Если $u=u^0+u^1$, $u^0\in\mathcal{U}^0$, $u^1\in\mathcal{U}^1$, то $G^tu=u^1=\tilde{P}u=U^0u$.

Аналогично показываем, что $U_-^tU_+^tu=U^0u$ для $u\in\tilde{\mathcal{U}}$. Поэтому определенное выше семейство $\{U^t:t\in\mathbb{R}\}$ действительно является группой.

Для $\{F^t:t\in\mathbb{R}\}$ все доказывается аналогично. $\triangleright$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.2.2. 1) Показать непосредственно, что $\{U^t:t\in\mathbb{R}\}$, $\{F^t:t\in\mathbb{R}\}$ – экспоненциально ограниченные группы.

2) Показать, что первая из групп – разрешающая для уравнения (1.2.2), а также разрешает уравнение $L\dot{u}=-Mu$ в том смысле,что функция $u(t)=U^{-t}u$ является его решением при любом u из некоторого плотного в $\mathcal{U}$ линеала.

3.3.Расщепление пространств

ТЕОРЕМА 3.3.1. *Пусть пространство* $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$ *рефлексивно, оператор* M *слабо* (L,p)*-бирадиален.* Тогда $\mathcal{U}=\mathcal{U}^0\oplus\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}=\mathcal{F}^0\oplus\mathcal{F}^1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.1. Оператор M называется *сильно (L,p)-бирадиальным справа (слева)*, если он (L,p)-бирадиален и

$$\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}Mu\right\|_{\mathcal{U}} \le \frac{\mathrm{const}(u)}{(|\lambda|-a)\prod_{k=0}^{p}(|\mu_k|-a)} \quad \forall u\in\operatorname{dom}M \tag{3.3.1}$$

(существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L-M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f\|_{\mathcal{F}} \le \frac{\mathrm{const}(f)}{(|\lambda|-a)\prod_{k=0}^{p}(|\mu_k|-a)} \quad \forall f\in\mathcal{F}^{\circ}) \tag{3.3.2}$$

при любых $|\lambda|>a, |\mu_0|>a, |\mu_1|>a, ..., |\mu_p|>a$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-бирадиален справа (слева). Тогда сильно (L,p)-радиальны справа (слева) операторы M и $-M$.*

Вместо доказательства заметим лишь, что это утверждение совершенно аналогично утверждению 3.1.2.

УПРАЖНЕНИЕ 3.3.1. Доказать теорему 3.3.1 и утверждение 3.3.1.

ТЕОРЕМА 3.3.2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-бирадиален справа (слева). Тогда $\mathcal{U}=\mathcal{U}^0\oplus\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}=\mathcal{F}^0\oplus\mathcal{F}^1)$.*

$\lhd$ Пусть $u\in\operatorname{dom}M$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 2.3.2, получим

$$(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u-(\lambda R^L_\lambda(M))^{p+1}u=$$

$$(\lambda-\mu)\sum_{k=0}^{p}\mu^{p-k}\lambda^k(R^L_\mu(M))^{p+1-k}(R^L_\lambda(M))^k(\lambda L-M)^{-1}Mu.$$

Отсюда

$$\|(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u-(\lambda R^L_\lambda(M))^{p+1}u\|_{\mathcal{U}}\le$$
$$2^{p+1}\mathrm{const}(u)|(|\mu|-a)^{-1}-(|\lambda|-a)^{-1}|$$

при $|\mu|>2a$, $|\lambda|>2a$ в силу определения 3.1.1. Поэтому существует предел

$$Pu=\lim_{|\mu|\to\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u \quad \forall u\in\operatorname{dom}M.$$

Из того, что $\overline{\operatorname{dom}M}=\mathcal{U}$, а семейство операторов $\{(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}: |\mu|>2a\}$ в силу (L,p)-бирадиальности оператора M равномерно ограничено, следует, что $P\in\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

О том, что P – проектор, нам известно еще из леммы 3.1.3, только определен он там был на подпространстве $\tilde{\mathcal{U}}$. Поэтому

$$\mathcal{U} = \ker P \oplus \operatorname{im} P = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1.$$

Расщепление пространства $\mathcal{F}$ показывается с помощью проектора

$$Q = s\text{-}\lim_{|\mu|\to\infty} (\mu L^L_\mu(M))^{p+1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$$

вдоль $\mathcal{F}^0$ на $\mathcal{F}^1$. ▷

Ясно, что при условии сильной (L,p)-бирадиальности оператора M справа (слева) разрешающая группа уравнения (3.1) ((3.2)) задана на всем пространстве $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$), а ее единицей является проектор P (Q).

СЛЕДСТВИЕ 3.3.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-бирадиален справа и слева. Тогда*

(i) $LPu = QLu\ \forall u \in \mathcal{U}$;

(ii) $\forall u \in \operatorname{dom} M\ \ Pu \in \operatorname{dom} M$ и $MPu = QMu$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3.2. *Пусть оператор L непрерывно обратим, а оператор $S = L^{-1}M$ бирадиален. Тогда оператор M сильно (L,p)-бирадиален справа и слева.*

Обозначим через L_1 (M_1) сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^1$ ($\operatorname{dom} M_1 = \mathcal{U}^1 \cap \operatorname{dom} M$).

СЛЕДСТВИЕ 3.3.2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-бирадиален справа и слева. Тогда*

(i) $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$;

(ii) $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$;

(iii) $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.3.2. Доказать утверждение 3.3.2 и следствие 3.3.2, как во второй главе.

3.4.Обратный оператор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.1. Оператор M называется *сильно (L,p)-бирадиальным*, если он сильно (L,p)-бирадиален слева и выполняется оценка

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \le \frac{K}{(|\lambda| - a)\prod_{k=0}^{p}(|\mu_k| - a)} \qquad (3.4.1)$$

при всех $|\lambda| > a, |\mu_0| > a, ..., |\mu_p| > a$.

Понятно, что сильно (L, p)-бирадиальный оператор M сильно (L, p)- бирадиален справа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4.1. *Пусть оператор L непрерывно обратим, а оператор $S = L^{-1}M$ бирадиален. Тогда оператор M сильно (L, p)-бирадиален.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4.2. *Пусть оператор M сильно (L, p)-бирадиален. Тогда сильно (L, p)-радиальны операторы M и $-M$.*

ТЕОРЕМА 3.4.1. *Пусть оператор M сильно (L, p)-бирадиален. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$.*

УПРАЖНЕНИЕ 3.4.1. Доказать утверждения 3.4.1, 3.4.2 и теорему 3.4.1.

3.5.Инфинитезимальные генераторы

Сужение $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ $(\{F_1^t : t \in \mathbb{R}\})$ группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ $(\{F^t : t \in \mathbb{R}\})$ на подпространство $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$ является невырожденной сильно непрерывной группой.

Введем следующие обозначения:

$$S_1 = L_1^{-1}M_1 : \operatorname{dom} S_1 \to \mathcal{U}^1, \quad \operatorname{dom} S_1 = \operatorname{dom} M_1,$$

$$T_1 = M_1L_1^{-1} : \operatorname{dom} T_1 \to \mathcal{F}^1, \quad \operatorname{dom} T_1 = L_1[\operatorname{dom} M_1]$$

при условии сильной (L, p)–бирадиальности оператора M.

ТЕОРЕМА 3.5.1.*Пусть оператор M сильно (L, p) – бирадиален. Тогда инфинитезимальным генератором группы $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ $(\{F_1^t : t \in \mathbb{R}\})$ является оператор S_1 (T_1).*

$\triangleleft$ Невырожденная группа $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ составлена из двух невырожденных полугрупп, как это видно из доказательства теоремы 3.2.1. Из аналогичной теоремы в предыдущей главе следует, что их генераторами являются соответственно операторы $L_1^{-1}M_1$ и $-L_1^{-1}M_1$, так как сильно (L, p)-радиальны операторы M и $-M$ (утверждение 3.4.2). По определению генератора группы видно, что им является генератор полугруппы, соответствующей положительным значениям параметра t или умноженный на -1 генератор полугруппы, соответствующей отрицательным значениям параметра группы t. Поэтому искомым генератором является оператор $S_1 = L_1^{-1}M_1$.

Для второй группы теорема доказывается аналогично. $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 3.5.1. Вычислить генераторы групп в условиях предыдущей теоремы непосредственно.

СЛЕДСТВИЕ 3.5.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-бирадиален. Тогда операторы S_1 и T_1 бирадиальны.*

УПРАЖНЕНИЕ 3.5.2. Показать, что если бы мы ввели в рассмотрение понятие сильно p–бирадиального оператора S ($S = M, \mathcal{U} = \mathcal{F}$, $L = I$ в определении 3.4.1), то оно совпадало бы с понятием бирадиального оператора.

3.6.Генераторы сильно непрерывных групп операторов с ядрами

Данный параграф завершает аналогии с предыдущей главой.

(B1) *Существуют две сильно непрерывные и экспоненциально ограниченные группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ и $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ операторов $U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $F^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ с ядрами.*

Положим $P = U^0$, $Q = F^0$. Очевидно, что P и Q – проекторы. Введем обозначения: $\mathcal{U}^0 = \ker P$, $\mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathcal{F}^0 = \ker Q$, $\mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q$; имеем $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$. Через $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ и $\{F_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ обозначим сужения соответствующих групп на подпространства $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$. Сужения являются невырожденными группами и имеют инфинитезимальные генераторы S_1 и T_1 соответственно, являющиеся бирадиальными операторами в соответствии с теоремой о генераторах невырожденных сильно непрерывных групп.

(B2) *Существует линейный гомеоморфизм $L_1 : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1$ такой, что $L_1 S_1 = T_1 L_1$.*

(Последнее равенство предполагает, что $L_1[\operatorname{dom} S_1] = \operatorname{dom} T_1$).

(B3) *Существует биективный оператор $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$.*

Отсюда следует существование оператора $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$.

(B4) *Существует оператор $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$ такой, что оператор $H = M_0^{-1} L_0$ нильпотентен степени не больше $p \in N \cup \{0\}$.*

$$\text{(B5)} \quad L = L_0(I - P) + L_1 P, \quad M = M_0(I - P) + L_1 S_1 P,$$

$$\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} M_0 \dot{+} \operatorname{dom} S_1.$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.6.1. Показать, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}\ell(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

ТЕОРЕМА 3.6.1. *Оператор* M *сильно* (L, p)*– бирадиален тогда и только тогда, когда выполнены все условия (B1)-(B5).*

УПРАЖНЕНИЕ 3.6.2. Доказать теорему 3.6.1.

ГЛАВА 4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ С ЯДРАМИ

4.1.Относительно спектрально ограниченный оператор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.1. Оператор M называется *спектрально ограниченным относительно* оператора L (или просто (L,σ)*-ограниченным*), если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1.1. Пусть $\operatorname{dom} M = \mathcal{U}$ и оператор L непрерывно обратим. Тогда оператор M (L,σ)-ограничен.

$\triangleleft$ В условиях утверждения оператор M ограничен, так как он замкнут и определен на всем пространстве. Поэтому оператор $L^{-1}M$ также ограничен, то есть имеет ограниченный спектр. Из утверждения 1.3.1 следует требуемое. $\triangleright$

Возьмем (L,σ)-ограниченный оператор M, выберем в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ замкнутый контур

$$\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R > a\}. \tag{4.1.1}$$

Тогда имеют смысл следующие интегралы, как интегралы от аналитических функций по замкнутому контуру:

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} L^L_\mu(M)d\mu. \tag{4.1.2}$$

ЛЕММА 4.1.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда операторы $P:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ и $Q:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$, определенные формулами* (4.1.2), *являются проекторами.*

$\triangleleft$ Докажем лемму для P. Оператор непрерывен, так как интеграл сходится в норме пространства операторов. Покажем его идемпотентность. Возьмем контур $\gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R_1 > R > a\}$. Тогда в силу аналитичности правой L-резольвенты

$$P^2 = (2\pi i)^{-2}\int\limits_{\gamma_1} R^L_\lambda(M)d\lambda \int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M)d\mu =$$

$$(2\pi i)^{-2}\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma} R^L_\lambda(M)R^L_\mu(M)d\lambda d\mu =$$

$$(2\pi i)^{-2}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{\mu-\lambda}d\mu\int\limits_{\gamma_1}R^L_\lambda(M)d\lambda-(2\pi i)^{-2}\int\limits_{\gamma_1}\frac{1}{\mu-\lambda}d\lambda\int\limits_{\gamma}R^L_\mu(M)d\mu=$$

$$(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\gamma}R^L_\mu(M)d\mu=P.$$

Здесь мы использовали тождество (1.3.2), теорему Коши и интегральную формулу Коши. ▷

Положим $\mathcal{U}^0=\ker P$, $\mathcal{F}^0=\ker Q$, $\mathcal{U}^1=\operatorname{im}P$, $\mathcal{F}^1=\operatorname{im}Q$. Из предыдущей леммы следует, что

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}^0\oplus\mathcal{U}^1,\quad \mathcal{F}=\mathcal{F}^0\oplus\mathcal{F}^1.$$

Через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^k$ ($\operatorname{dom}M_k=\operatorname{dom}M\cap\mathcal{U}^k$), $k=0,1$. Кроме того, $\sigma^L_k(M)$ будет обозначать L_k-спектр оператора M_k.

ЛЕММА 4.1.2. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда для любого $u\in\mathcal{U}$ $Pu\in\operatorname{dom}M$.*

◁ Действительно, согласно теореме Коши и непрерывности оператора L,

$$\int\limits_{\gamma}MR^L_\mu(M)d\mu=\int\limits_{\gamma}(M-\mu L+\mu L)R^L_\mu(M)d\mu=$$

$$\int\limits_{\gamma}\mu LR^L_\mu(M)d\mu-\int\limits_{\gamma}Ld\mu=L\int\limits_{\gamma}\mu R^L_\mu(M)d\mu.$$

Очевидно, что последний интеграл сходится в операторной норме. Вкупе с замкнутостью оператора M это означает требуемое. ▷

ТЕОРЕМА 4.1.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда действия операторов L и M расщепляются:*

(i) $L_k\in\mathcal{L}(\mathcal{U}^k;\mathcal{F}^k)$, $k=0,1$;

(ii) $M_0\in\mathcal{C}l(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$, $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$;

(iii) *существует оператор* $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$;

(iv) L_0*-спектр оператора* M_0 $\sigma^L_0(M)$ *не содержит конечных точек.*

◁ (i) Заметим сначала, что при любых $u^0\in\mathcal{U}^0$, $u^1\in\mathcal{U}^1$ $u^0=(I-P)u^0$, $u^1=Pu^1$. Поэтому $Lu^0=L(I-P)u^0=(I-Q)Lu^0\in\mathcal{F}^0$. Здесь мы использовали тот факт, что в силу непрерывности оператора L

$$LP = \int\limits_{\gamma} LR_{\mu}^{L}(M)d\mu = \int\limits_{\gamma} L_{\mu}^{L}(M)Ld\mu = QL.$$

Далее, $Lu^1 = LPu^1 = QLu^1 \in \mathcal{F}^1$. Операторы L_0 и L_1 непрерывны как сужения непрерывного оператора.

(ii) Расщепление действия оператора M показывается так же, как для оператора L с использованием тождества

$$\forall u \in \operatorname{dom} M \quad LPu = QMu,$$

следующего из (1.3.3).

Согласно лемме 4.1.2 $\mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P \subset \operatorname{dom} M$, поэтому $\operatorname{dom} M_1 = \mathcal{U}^1 \cap \operatorname{dom} M = \mathcal{U}^1$. Значит, оператор M_1 непрерывен.

(iii) Обратным к L_1 является оператор

$$L_1^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (\mu L_1 - M_1)^{-1} d\mu,$$

непрерывный в силу замкнутости контура и аналитичности в его окрестности L-резольвенты оператора M. $L_1^{-1} : \mathcal{F}^1 \to \mathcal{U}^1$, согласно утверждениям (i), (ii) данной теоремы.

Нетрудно увидеть, что действительно $L_1^{-1}L_1 = P\Big|_{\mathcal{U}^1} = I_{\mathcal{U}^1}$, $L_1 L_1^{-1} = Q\Big|_{\mathcal{F}^1} = I_{\mathcal{F}^1}$.

(iv) Обозначим

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{(\mu L_0 - M_0)^{-1}}{\mu - \lambda} d\mu,$$

где контур $\gamma_1 = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = \max\{R, |\lambda| + 1\}$. Из тождества (1.3.1) следует, что для $u \in \operatorname{dom} M_0$

$$A(\lambda)(\lambda L_0 - M_0)u = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\gamma_1} \frac{u}{\mu - \lambda} d\mu - Pu = u + 0 = u,$$

так как в силу аналитичности подинтегральной функции вне γ в выражении (4.1.2) для P можно заменить контур γ на более широкий контур γ_1, который содержит внутри себя точку λ.

Обратно, для $f \in \mathcal{F}^0$

$$(\lambda L_0 - M_0)A(\lambda)f = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f}{\mu - \lambda} d\mu - Qf = f + 0 = f.$$

Таким образом, при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ существует непрерывный оператор $(\lambda L_0 - M_0)^{-1} = A(\lambda)$. $\rhd$

УПРАЖНЕНИЕ 4.1.1. Показать плотность линеала $\operatorname{dom} M_0$ в $\mathcal{U}^0$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.*

$\lhd$ Для доказательства достаточно заметить, что согласно теореме 4.1.1 (iv) $0 \notin \sigma_0^L(M)$. $\rhd$

Обозначим $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$, $J = L_0 M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0)$.

Согласно теореме 4.1.1, операторнозначная функция $(\mu L_0 - M_0)^{-1}$ является целой функцией. Поэтому мы эту функцию можем представить рядом Тейлора:

$$(\mu L_0 - M_0)^{-1} = (\mu H - I)^{-1} M_0^{-1} = \left(-\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k \right) M_0^{-1},$$

абсолютно и равномерно сходящимся на любом компакте в $\mathbb{C}$.

Положим $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$. Имеем

$$(\mu L_1 - M_1)^{-1} = (\mu I - S)^{-1} L_1^{-1} =$$

$$\mu^{-1}(I - \mu^{-1}S)^{-1} L_1^{-1} = \mu^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} S^k \right) L_1^{-1}.$$

Отсюда для (L,σ)-ограниченного оператора M имеем в силу теоремы 4.1.1, следствия 4.1.1 и последних двух разложений

$$(\mu L - M)^{-1} = \left(-\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k \right) M_0^{-1}(I - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q. \tag{4.1.3}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.2. Для операторнозначной функции (4.1.3) бесконечно удаленную точку будем называть

(i) *устранимой особой точкой*, если $H = \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$;

(iii) *существенно особой точкой*, если $\forall p \in \mathbb{N}$ $H^p \neq \mathbb{O}$.

ЛЕММА 4.1.3. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда M-корневой линеал оператора L лежит в $\mathcal{U}^0$.*

$\lhd$ Это утверждение сразу следует из утверждения 1.3.2, леммы 1.3.4 (i), определения $\mathcal{U}^0$ и теоремы Коши. $\rhd$

ТЕОРЕМА 4.1.2. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, и точка ∞ является:*

(i) *устранимой особой точкой функции $(\mu L - M)^{-1}$. Тогда оператор L не имеет M-присоединенных векторов*, $\ker L = \mathcal{U}^0$, $\operatorname{im} L = \mathcal{F}^1$.

(ii) *полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ функции $(\mu L - M)^{-1}$. Тогда длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L ограничена числом p (цепочка длины p при этом существует), и M-корневой линеал оператора L совпадает с подпространством $\mathcal{U}^0$.*

$\lhd$ (i) По условию теоремы оператор $H = M_0^{-1}L_0 = \mathbb{O}$. Пусть φ_1 – M-присоединенный вектор высоты 1, соответствующий собственному вектору φ_0. Согласно предыдущей лемме, оба этих вектора лежат в $\mathcal{U}^0 \setminus \{0\}$. Тогда по определению M-присоединенного вектора $L_0\varphi_1 = M_0\varphi_0$, т.е. $\varphi_0 = H\varphi_1 = 0$. Противоречие.

Включение $\ker L \subset \ker P$ очевидно. Покажем обратное включение. Из того, что $H = \mathbb{O}$ следует $L_0 = \mathbb{O}$ в силу обратимости M_0^{-1}. Другими словами, для $u \in \mathcal{U}^0$ $Lu = 0$, что и требовалось.

Далее, $Lu = L(I - P + P)u = L_0(I - P)u + L_1Pu = 0 + (I - Q)L_1Pu + QL_1Pu = L_1Pu - L_1P^2u + QL_1Pu = 0 + QL_1Pu$. Обратное включение $\operatorname{im} Q \subset \operatorname{im} L$ показывается так: $Qu = L\int\limits_{\gamma}(\mu L - M)^{-1}d\mu$, поскольку оператор L непрерывен, а последний интеграл существует.

(ii) Так же, как при доказательстве предыдущего утверждения можно показать, что для M-присоединенного вектора φ_k высоты k $\varphi_0 = H^k\varphi_k$. Из того, что $H^{p+1} = \mathbb{O}$, следует, что k не может быть больше p.

В силу леммы 4.1.3 осталось лишь доказать, что $\mathcal{U}^0$ лежит в M-корневом линеале. Возьмем такой $u \in \mathcal{U}^0$, тогда $H^{k+1}u = 0$, $H^k u \neq 0$ при некотором $k \leq p$. Отсюда $L_0H^ku = 0$, т.е. $H^ku = \varphi_0 \neq 0$ – собственный вектор. Нетрудно увидеть, что u – M-присоединенный вектор высоты k, соответствующий φ_0. Так как $H^p \neq \mathbb{O}$, то существует M-присоединенный вектор высоты p. $\rhd$

СЛЕДСТВИЕ 4.1.2. (i) *В условиях теоремы* 4.1.2 (i)

$$\mathcal{U}^0 = \ker R_\mu^L(M), \quad \mathcal{U}^1 = \operatorname{im} R_\mu^L(M),$$

$$\mathcal{F}^0 = \ker L_\mu^L(M), \quad \mathcal{F}^1 = \operatorname{im} L_\mu^L(M);$$

(ii) *в условиях теоремы* 4.1.2 (ii)

$$\mathcal{U}^0 = \ker R_{(\mu,p)}^L(M), \quad \mathcal{U}^1 = \operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M),$$

$$\mathcal{F}^0 = \ker L_{(\mu,p)}^L(M), \quad \mathcal{F}^1 = \operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M).$$

$\triangleleft$ (i) Первое равенство следует из определения подпространства $\mathcal{U}^0$, теоремы 4.1.2 (i) и леммы 1.3.3 (i).

В силу того, что $L_0 = \mathbb{O}$, $\operatorname{im} R_\mu^L(M) = \operatorname{im} R_\mu^{L_1}(M_1) = \operatorname{im}(\mu I - L_1^{-1}M_1)^{-1} = \operatorname{dom} M_1 = \mathcal{U}^1$. Здесь мы использовали результаты теоремы 4.1.1 (i)-(iii).

Возьмем вектор $f \in \ker L_\mu^L(M)$. Тогда, согласно лемме 1.3.3 (ii), $f = M\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{U}^0 \bigcap \operatorname{dom} M$. По теореме 4.1.1 (ii) $f \in \mathcal{F}^0$. Теперь возьмем вектор $f \in \mathcal{F}^0$. По теореме 4.1.1 (i), (ii) $(\mu L - M)^{-1} f \in \mathcal{U}^0 = \ker L$, согласно теореме 4.1.2 (i). Поэтому вектор $f \in \ker L_\mu^L(M)$. Таким образом, множества $\mathcal{F}^0$ и $\ker L_\mu^L(M)$ совпадают.

По теореме 4.1.2 (i) $\mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q = \operatorname{im} L = \operatorname{im} L_1 = \operatorname{im} L_\mu^{L_1}(M_1) = \operatorname{im} L_\mu^L(M)$, так как $L_0 = \mathbb{O}$, а $(\mu L_1 - M_1)^{-1}$ – гомеоморфизм пространств $\mathcal{F}^1$ и $\mathcal{U}^1$, согласно теореме 4.1.1 (i), (ii).

(ii) Утверждение о подпространстве $\mathcal{U}^0$ следует из теоремы 4.1.2 (ii), утверждения 1.3.2 и леммы 1.3.6 (i).

Так как $R_{(\mu,p)}^{L_0}(M_0) = \left(\prod\limits_{k=0}^{p} (\mu H - I)^{-p-1}\right) H^{p+1} = \mathbb{O}$, то $\operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M) = \operatorname{im} R_{(\mu,p)}^{L_1}(M_1) = \operatorname{im} \prod\limits_{k=0}^{p} (\mu I - L_1^{-1}M_1)^{-1} = \operatorname{dom} M_1^{p+1} = \mathcal{U}^1$. Здесь используется непрерывность оператора M_1.

Согласно лемме 1.3.6, если $f \in \ker L_{(\mu,p)}^L(M)$, то $f = M\varphi$, причем $\varphi \in \mathcal{U}^0 \bigcap \operatorname{dom} M$. Отсюда и из теоремы 4.1.1 (ii) следует, что $f \in \mathcal{F}^0$. Теперь возьмем вектор $f \in \mathcal{F}^0$. Тогда при некотором $\mu \in \rho^L(M)$ $(\mu L - M)^{-1} f \in \mathcal{U}^0$ по теореме 4.1.1 (i), (ii). Поэтому $(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1} f = 0$. Подействуем на последнее равенство оператором $(\mu L - M)$ и получим, что вектор f лежит в $\ker L_{(\mu,p)}^L(M)$.

$L^{L_0}_{(\mu,p)}(M_0) = H^{p+1}\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu H - I)^{-p-1} = \mathbb{O}$. В силу этого и теоремы 4.1.1 (i)- (iii) $\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M) = \operatorname{im} L^{L_1}_{(\mu,p)}(M_1) = \operatorname{im}\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k I - M_1 L_1^{-1})^{-1} = \mathcal{F}^1$.$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 4.1.3. (i) *в условиях теоремы* 4.1.2 (i)

$$\ker R^L_\mu(M)\bigcap \operatorname{im} R^L_\mu(M) = \{0\},$$

$$\ker L^L_\mu(M)\bigcap \operatorname{im} L^L_\mu(M) = \{0\} \quad \forall \mu \in \rho^L(M);$$

(ii) *в условиях теоремы* 4.1.2(ii)

$$\ker R^L_{(\mu,p)}(M)\bigcap \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\},$$

$$\ker L^L_{(\mu,p)}(M)\bigcap \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\} \quad \forall \mu_k \in \rho^L(M), \quad k = \overline{0,p}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.1.2. Доказать следствие.

4.2.Существование аналитических групп уравнения типа Соболева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.1. *Решением* уравнения (1.2.8) будем называть функцию $v \in C^1(\mathbb{R};\mathcal{V})$, удовлетворяющую этому уравнению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.2. Отображение $V^{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$ называется *группой разрешающих операторов* (или просто *разрешающей группой*) уравнения (1.2.8), если:

(i) $V^sV^t = V^{s+t}\ \forall s,t \in \mathbb{R}$;

(ii) для любого $v_0 \in \mathcal{V}$ функция $v(t) = V^t v_0$ является решением уравнения (1.2.8).

Разрешающая группа называется *аналитической*, если она допускает аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с сохранением свойств (i) и (ii). Группу будем обозначать через $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$.

ТЕОРЕМА 4.2.1. *Пусть оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$ спектрально ограничен относительно оператора $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Тогда существуют аналитические разрешающие группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ и $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ уравнений соответственно* (1.2.6) *и* (1.2.7), *причем*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \tag{4.2.1}$$

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} L_{\mu}^{L}(M) e^{\mu t} d\mu, \qquad (4.2.2)$$

где замкнутый контур γ *удовлетворяет* (4.1.1).

$\lhd$ Покажем выполнение группового свойства. Возьмем контур γ_1 как в лемме 4.1.1.

$$U^t U^s = (2\pi i)^{-2} \int\limits_{\gamma_1} R_{\lambda}^{L}(M) e^{\lambda t} d\lambda \int\limits_{\gamma} R_{\mu}^{L}(M) e^{\mu s} d\mu =$$

$$(2\pi i)^{-2} \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma} R_{\lambda}^{L}(M) R_{\mu}^{L}(M) e^{\lambda t + \mu s} d\lambda d\mu =$$

$$(2\pi i)^{-2} \int\limits_{\gamma} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu \int\limits_{\gamma_1} R_{\lambda}^{L}(M) e^{\lambda t} d\lambda - (2\pi i)^{-2} \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} d\lambda \int\limits_{\gamma} R_{\mu}^{L}(M) e^{\mu s} d\mu$$

$$= 0 + (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\gamma} R_{\mu}^{L}(M) e^{\mu(t+s)} d\mu = U^{t+s}.$$

Функции $\mu^k R_{\mu}^{L}(M) e^{\mu\tau}$ непрерывно дифференцируемы при $(\mu, \tau) \in K = \gamma \times \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| \leq T\}$, поэтому интегралы по γ от этих функций дифференцируемы по τ. Следовательно, операторнозначное отображение U^{τ} бесконечно дифференцируемо по комплексному параметру τ во всей $\mathbb{C}$, то есть аналитично.

Покажем, что группа разрешает уравнение (1.2.6).

$$R_{\alpha}^{L}(M) \frac{d}{dt}(U^t u_0) = (\alpha L - M)^{-1} \int\limits_{\gamma} \mu L R_{\mu}^{L}(M) e^{\mu t} u_0 d\mu =$$

$$(\alpha L - M)^{-1} \int\limits_{\gamma} L e^{\mu t} u_0 d\mu + (\alpha L - M)^{-1} \int\limits_{\gamma} M R_{\mu}^{L}(M) e^{\mu t} u_0 d\mu =$$

$$0 + (\alpha L - M)^{-1} M \int\limits_{\gamma} R_{\mu}^{L}(M) e^{\mu t} u_0 d\mu = (\alpha L - M)^{-1} M U^t u_0.$$

Для группы (4.2.2) теорема доказывается аналогично.

Единицы групп совпадают с проекторами P и Q, соответственно.

При $u_0 \in \mathcal{U}$ при любом $t \in \mathbb{R}$ решение уравнения (1.2.6)

$$u(t) = U^t u_0 = U^{0+t} u_0 = U^0 U^t u_0 = P U^t u_0 \in \mathcal{U}^1 = \operatorname{dom} M_1 \subset \operatorname{dom} M$$

в силу теоремы 4.1.1 (iii). Поэтому функция $u(t) = U^t u_0$ является решением уравнения (1.2.2), и группа (4.2.1) является разрешающей и для уравнения (1.2.2). $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.3. *Ядром* (*образом*) группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем множество $\ker V^{\cdot} = \{v \in \mathcal{V} : \exists t \in \mathbb{R} \quad V^t v = 0\}$ ($\operatorname{im} V^{\cdot} = \{v \in \mathcal{V} : V^0 v = v\}$).

УПРАЖНЕНИЕ 4.2.1. Непосредственно по определению показать, что в силу пункта (i) определения группы

$$\ker V^{\cdot} = \ker V^t, \quad \operatorname{im} V^{\cdot} = \operatorname{im} V^t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

В частности,

$$\ker U^{\cdot} = \ker P = \mathcal{U}^0, \quad \operatorname{im} U^{\cdot} = \operatorname{im} P = \mathcal{U}^1,$$

$$\ker F^{\cdot} = \ker Q = \mathcal{F}^0, \quad \operatorname{im} F^{\cdot} = \operatorname{im} Q = \mathcal{F}^1.$$

Если мы сузим группы на их образы, $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$ соответственно, то, как и в предыдущих главах, получим невырожденные аналитические группы, которые обозначим $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ и $\{F_1^t : t \in \mathbb{R}\}$.

ЛЕММА 4.2.1. *Инфинитезимальным генератором группы* $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ ($\{F_1^t : t \in \mathbb{R}\}$) *является оператор* $L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$ ($M_1 L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1)$).

$\triangleleft$ Покажем это для группы $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$. Из (4.2.1) и теремы 4.1.1 следует, что эта группа представима в виде

$$U_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (\mu L_1 - M_1)^{-1} L_1 e^{\mu t} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (\mu I - L_1^{-1} M_1)^{-1} e^{\mu t} d\mu.$$

Отсюда, согласно классической теории, получаем утверждение леммы.

Для группы $\{F_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ утверждение леммы доказывается аналогично. $\triangleright$

4.3. Генераторы аналитических групп операторов с ядрами

В этом параграфе выделим пять условий в терминах аналитических групп, необходимых и достаточных для (L, σ)-ограниченности оператора M.

(C1) *Существуют аналитические группы* $\{U^\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : \tau \in \mathbb{C}\}$, *и* $\{F^\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : \tau \in \mathbb{C}\}$.

Т.е. $\forall \tau, \sigma \in \mathbb{C}$ $U^\tau U^\sigma = U^{\tau+\sigma}$, $F^\tau F^\sigma = F^{\tau+\sigma}$.

Поскольку $P = U^0$ и $Q = F^0$ – проекторы по определению групп, то пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ расщепляются в прямые суммы: $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, где

$$\mathcal{U}^0 = \ker P = \ker U^\cdot, \quad \mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P = \operatorname{im} U^\cdot,$$

$$\mathcal{F}^0 = \ker Q = \ker F^\cdot, \quad \mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q = \operatorname{im} F^\cdot.$$

Очевидно, что сужения $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ и $\{F_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ групп на их образы являются невырожденными аналитическими группами. Они имеют инфинитезимальные генераторы – $S = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} U_1^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$ и $T = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_1^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1)$, соответственно, т.е.

$$U_1^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tS)^n}{n!} = e^{tS}, \quad F_1^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tT)^n}{n!} = e^{tT}.$$

(C2) *Существует линейный гомеоморфизм* $L_1 : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1$ *такой, что* $L_1 S = T L_1$.

(C3) *Существует биективный оператор* $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0; \mathcal{F})^0)$.

Из последнего условия следует, что существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$.

(C4) *Существует оператор* $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$ *такой, что* L_0-спектр оператора M_0 $\sigma^{L_0}(M_0)$ не содержит конечных точек.

$$\text{(C5)} \quad L = L_0(I-P) + L_1 P, \quad M = M_0(I-P) + L_1 S P,$$

$$\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} M_0 \dot{+} \mathcal{U}^1.$$

ТЕОРЕМА 4.3.1. *Оператор* M (L, σ)*-ограничен тогда и только тогда, когда выполнены все условия (C1)-(C5).*

$\triangleleft$ Рассмотрим

$$(\mu L - M)^{-1} = (\mu L_0 - M_0)^{-1}(I - Q) + (\mu L_1 - L_1 S)^{-1} Q =$$

$$(\mu H - I)^{-1} M_0^{-1}(I - Q) + \frac{1}{\mu}\left(I - \frac{S}{\mu}\right)^{-1} L_1^{-1} Q.$$

Поскольку первое слагаемое является целой функцией в силу условия (C4), а второе слагаемое существует при $|\mu| > \|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1)}$, то оператор M (L, σ)-ограничен. $\triangleright$

ГЛАВА 5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ С ЯДРАМИ

5.1. Относительно p-секториальный оператор

Как и раньше, обозначим через $\mathcal{U}^0$ ($\mathcal{F}^0$) ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\ker L^L_{(\mu,p)}(M)$). Через L_0 (M_0) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^0$ ($\operatorname{dom} M_0 = \mathcal{U}^0 \cap \operatorname{dom} M$). Мы уже доказывали (лемма 2.1.1), что $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$, $M_0 : \operatorname{dom} M_0 \to \mathcal{F}^0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.1. Оператор M называется *p-секториальным относительно* оператора L (короче, (L,p)-*секториальным*), если существуют константы $K > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор

$$S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \quad \mu \neq a\} \subset \rho^L(M), \tag{5.1.1}$$

причем

$$\max\left\{\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \left\|L^L_{(\mu,p)}(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}|\mu_k - a|} \tag{5.1.2}$$

$$\forall \mu_k \in S^L_{a,\theta}(M), \quad k = \overline{0,p}.$$

Как и во второй главе, можно заметить, что, не теряя общности, в дальнейшем можно считать $a = 0$ в определении 5.1.1. Переобозначим $\tilde{M} = M$, $S^L_{0,\theta}(M) = S^L_\theta(M)$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.1. Доказать, что если оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ непрерывно обратим, то из секториальности оператора $L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U})$ следует (L,p)-секториальность оператора $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а из $(L,0)$-секториальности M – секториальность $L^{-1}M$.

ЛЕММА 5.1.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда $\exists R > 0$ $\exists C > 0$ $\|(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq C|\mu|^p$ $\forall \mu \in S^L_\theta(M) \setminus \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq R\}$.*

$\lhd$ Получим оценку. Возьмем фиксированное $\beta \in S^L_\theta(M)$. Согласно тождеству (1.3.2),

$$(\mu L - M)^{-1} = (\beta L - M)^{-1} + (\beta - \mu)R^L_\mu(M)(\beta L - M)^{-1}.$$

Домножим это тождество на $(\beta - \mu)R^L_\beta(M)$ и, опять используя (1.3.2) и коммутирование правых L-резольвент, получим

$$(\mu L - M)^{-1} = (\beta L - M)^{-1} + (\beta - \mu)R^L_\beta(M)(\beta L - M)^{-1} +$$

$$(\beta-\mu)^2 R^L_\mu(M) R^L_\beta(M)(\beta L-M)^{-1}.$$

Тождество

$$(\mu L-M)^{-1}=\sum_{k=0}^{n}(\beta-\mu)^k\left(R^L_\beta(M)\right)^k(\beta L-M)^{-1}+$$

$$(\beta-\mu)^{n+1}R^L_\mu(M)\left(R^L_\beta(M)\right)^n(\beta L-M)^{-1}$$

доказывается по индукции умножением его на $R^L_\beta(M)$ и применением (1.3.2). Возьмем $n=p$. Тогда из определения 5.1.1 следует

$$\|(\mu L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})}\le\sum_{k=0}^{p}(|\beta|+|\mu|)^k\left\|\left(R^L_\beta(M)\right)^k(\beta L-M)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})}+$$

$$(|\beta|+|\mu|)^{p+1}K|\beta|^{-p}|\mu|^{-1}\|(\beta L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})}\le,$$

$$a_{-1}|\mu|^{-1}+a_0+a_1|\mu|+...+a_p|\mu|^p, \tag{5.1.3}$$

где все коэффициенты положительные. Мы использовали оценку (5.1.2), формулу бинома Ньютона для $(|\beta|+|\mu|)^k$, а числа $|\beta|^k$, $\|(R^L_\beta(M))^k(\beta L-M)^{-1}\|$ в качестве констант. Понятно, что при достаточно больших $|\mu|$

$$\sum_{k=-1}^{p-1}a_k|\mu|^k\le a_p|\mu|^p,$$

поэтому выражение (5.1.3) не превосходит $2a_p|\mu|^p$ при $|\mu|>R$. В качестве C возьмем $2a_p$. ▷

Из следующего очевидного утверждения следуют остальные результаты данного параграфа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда он слабо (L,p)-радиален.*

ЛЕММА 5.1.2. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда*

(i) *длины всех цепочек M-присоединенных векторов оператора L ограничены числом p;*

(ii) *множество* $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ *совпадает с M-корневым пространством оператора L;*

(iii) $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)\cap\operatorname{im}R^L_{(\mu,p)}(M)=\{0\}$, $\ker L^L_{(\mu,p)}(M)\cap\operatorname{im}L^L_{(\mu,p)}(M)=\{0\}$;

(iv) *существует оператор* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.

При условии (L,p)-секториальности оператора M напомним обозначения $H = M_0^{-1}L_0$, $J = L_0M_0^{-1}$. Через $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$ обозначим замыкание линеала $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ $(\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M))$, через $\tilde{\mathcal{U}}$ $(\tilde{\mathcal{F}})$ – замыкание линеала $\mathcal{U}^0 \dot{+} \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ $(\mathcal{F}^0 \dot{+} \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M))$ в норме пространства $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$.

ЛЕММА 5.1.3. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда*

(i) *операторы H и J нильпотентны степени не больше p;*

(ii) $\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u = u$ $\forall u \in \mathcal{U}^1$, $\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}f = f$ $\forall f \in \mathcal{F}^1$;

(iii) $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$.

Проектор вдоль $\mathcal{U}^0$ $(\mathcal{F}^0)$ на $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$ как во второй главе будем обозначать $\tilde{P} = s\text{-}\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}$ $(\tilde{Q} = s\text{-}\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1})$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.2. Доказать утверждение 5.1.1 и леммы 5.1.2, 5.1.3.

5.2. Существование аналитических полугрупп уравнений типа Соболева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.1. *Решением* уравнения (1.2.8) будем называть функцию $v(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{V})$, удовлетворяющую этому уравнению при $t > 0$, непрерывную вплоть до нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.2. Отображение $V^\cdot : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$ называется *полугруппой разрешающих операторов* (или просто *разрешающей полугруппой*) уравнения (1.2.8), если

(i) $V^sV^t = V^{s+t}$ $\forall s,t > 0$;

(ii) для любого $v_0 \in \mathcal{V}$ функция $v(t) = V^tv_0$ будет решением этого уравнения.

Наличие единицы у полугруппы не постулируется.

Полугруппа $\{V^t : t > 0\}$ называется *аналитической*, если она аналитически продолжима в некоторый сектор $\Sigma \subset \mathbb{C}$, содержащий луч $\mathbb{R}_+$; т.е. существует аналитическое отображение $\tilde{V}^\cdot : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$ со свойствами (i), (ii) предыдущего определения (с $s,t \in \Sigma$), совпадающее с $V^\cdot$ на положительной полуоси.

ТЕОРЕМА 5.2.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда существует аналитическая в секторе* $\Sigma = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg\tau| < \theta -$

$\pi/2,\ \tau \neq 0\}$, где θ из определения 5.1.1, и равномерно ограниченная разрешающая полугруппа $\{U^t : t > 0\}$ ($\{F^t : t > 0\}$) уравнения (1.2.6) ((1.2.7)), причем задается она интегралами типа Данфорда-Тейлора:

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu \quad \left(F^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} L_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu\right), \qquad (5.2.1)$$

где контур Γ удовлетворяет условию

$$\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = s - |x| + i\mathrm{tg}\theta x, x \in \mathbb{R}\}, \quad s > 0. \qquad (5.2.2)$$

$\lhd$ Заметим, что $\Gamma \subset S_\theta^L(M)$. Доказывается теорема так же, как теорема 4.2.1. Теорема Коши в данной ситуации применима. Сложнее здесь дело состоит со сходимостью интегралов.

Покажем сходимость интегралов

$$G_k^\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \mu^k R_\mu^L(M)e^{\mu\tau}d\mu,$$

равномерную по параметру $\tau \in \Sigma_1 = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg\tau| \leq \theta_1 < \theta - \pi/2, \tau \neq 0\}$. Обозначим $\tau = b + ic$, $\mathrm{tg}\theta = h$. По лемме 5.1.1 получим, что

$$\|G_k^\tau\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq \|L\|\int\limits_{\Gamma} |\mu|^{k+p}|e^{\mu\tau}||d\mu| =$$

$$2C\|L\|\sqrt{1+h^2}\int_0^\infty ((s-x)^2 + h^2x^2)^{\frac{k+p}{2}}e^{(s-x)b+hxc}dx \leq$$

$$\mathrm{const}\cdot\int_0^\infty ((s-x)^2 + h^2x^2)^{\frac{k+p}{2}}e^{-\delta x}dx < \infty.$$

Здесь мы использовали симметричность контура Γ, параметризацию верхней его части $\{\mathrm{Re}\,\mu = s - x, \mathrm{Im}\,\mu = -hx\}$, $x \in [0, \infty)$, и тот факт, что $-b + \mathrm{tg}\theta c \leq -\delta < 0$, так как по выбору τ $b > 0$, $|b| \geq |\mathrm{ctg}\theta_1 c| > \mathrm{ctg}(\theta - \pi/2)|c| = \mathrm{tg}\theta|c|$.

Из доказанной равномерной сходимости следует бесконечная дифференцируемость U^τ внутри сектора Σ_1, $(U^\tau)^{(k)} = G_k^\tau$. Понятно что любое число $\tau \in \Sigma$ лежит в замкнутом секторе вида Σ_1.

Покажем, что

$$\operatorname{im} U^t \subset \operatorname{dom} M \quad \forall t > 0.$$

Так как оператор M замкнутый, для этого надо показать, что сходится интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} M R_{\mu}^{L}(M) e^{\mu t} d\mu = \int\limits_{\Gamma} \mu L R_{\mu}^{L}(M) e^{\mu t} d\mu - \int\limits_{\Gamma} L e^{\mu t} d\mu.$$

В силу непрерывности оператора L первый из интегралов в правой части предыдущего равенства равен LG_1^t, а интегралы G_k^t, как говорилось выше, сходятся. Второй же интеграл в правой части этого равенства равен нулю ввиду аналитичности подынтегральной функции слева от контура. ▷

Полугруппа $\{U^t : t > 0\}$ дает решение уравнения (1.2.2).

УПРАЖНЕНИЕ 5.2.1. Показать, что как и во второй главе, если полугруппа $\{U^t : t > 0\}$ разрешающая для уравнения $L\dot{u} = \tilde{M}u$, в котором оператор $\tilde{M} = M - bL$ (L,p)-секториален с константой $a = 0$ (в определении 5.1.1), то полугруппой исходного уравнения $L\dot{u} = Mu$ будет

$$\{W^t = e^{bt} U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R_{\mu}^{L}(M) e^{(\mu+b)t} d\mu : t > 0\}.$$

Соответственно, для этой полугруппы вместо равномерной ограниченности будет иметь место экспоненциальная оценка

$$\forall t > 0 \quad \|W^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq C e^{bt}.$$

Если оператор M (L,σ)-ограничен, а ∞ – устранимая особая точка либо полюс порядка p L-резольвенты оператора M, то в силу теоремы 4.2.1 полугруппы (5.2.1) продолжаются до аналитических групп. При этом по теореме Коши в представлениях полугрупп (5.2.1) контур Γ можно заменить на замкнутый контур γ (4.1.1).

В условиях теоремы 5.2.1 очевидны следующие соотношения:

$$LU^t u = F^t L u \quad \forall u \in \mathcal{U},$$

$$MU^t u = F^t M u \quad \forall u \in \operatorname{dom} M \quad \forall t > 0$$

(второе следует из тождества (1.3.3)).

5.3. Ядра и образы разрешающих полугрупп

Также, как и в случае аналитических групп, из представлений (5.2.1) разрешающих полугрупп уравнений (1.2.6), (1.2.7), видно, что их элементы имеют нетривиальные ядра $\ker U^t \supset \ker R^L_\mu(M)$, $\ker F^t \supset \ker L^L_\mu(M)$ $\forall t > 0$, которые, в частности, мы и изучим в этом параграфе.

ЛЕММА 5.3.1. *Пусть оператор* M (L,p)*-секториален. Тогда* $\forall u \in \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ $(\forall f \in \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M))$ $\lim\limits_{t\to 0+} U^t u = u$ $(\lim\limits_{t\to 0+} F^t f = f)$.

$\lhd$ Возьмем вектор $u = R^L_{(\mu,p)}(M)v$. В силу леммы 1.3.6 (i) точки $\mu_0, ..., \mu_p$ мы можем выбрать любые. Мы их выберем лежащими вне контура Γ, удовлетворяющего (5.2.3). Тогда в силу L-резольвентного тождества (1.3.2)

$$U^t u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\lambda(M)e^{\lambda t}d\lambda R^L_{(\mu,p)}(M)v =$$

$$\prod_{k=0}^{p-1} R^L_{\mu_k}(M)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{R^L_\lambda(M)v}{\mu_p-\lambda}e^{\lambda t}d\lambda + R^L_{\mu_p}(M)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{\lambda t}v}{\lambda-\mu_p}d\lambda\right),$$

причем второй интеграл справа равен нулю по теореме Коши. Устремляем $t \to 0+$, тогда

$$\lim_{t\to 0+} U^t u = \prod_{k=0}^{p-1} R^L_{\mu_k}(M)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{R^L_\lambda(M)v}{\mu_p-\lambda}d\lambda. \tag{5.3.1}$$

Построим круг S_R радиусом $R > |\mu_p|$. В качестве контура Γ_R возьмем часть контура Γ, лежащую внутри круга S_R, и правую часть границы круга ∂S_R, отсекаемую контуром Γ. Ввиду (L,p)-секториальности оператора M интеграл по отброшенной части контура Γ и по взятой части окружности ∂S_R стремится к нулю при $R \to \infty$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.3.1. Доказать подробно это утверждение и тождество (5.3.1).

Далее,

$$\lim_{t\to 0+} U^t u = \prod_{k=0}^{p-1} R^L_{\mu_k}(M)\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{R^L_\lambda(M)v}{\mu_p-\lambda}d\lambda =$$

$$\prod_{k=0}^{p-1} R^L_{\mu_k}(M) R^L_{\mu_p}(M)v = R^L_{(\mu,p)}(M)v = u,$$

так как последний интеграл равен вычету функции $R^L_\lambda(M)v$ (контур обходим в отрицательном направлении). $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 5.3.2. Доказать утверждение о полугруппе $\{F^t : t > 0\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3.1. *Пусть* $\{V^t : t > 0\}$ – *аналитическая полугруппа. Тогда* $\ker V^{t_1} = \ker V^{t_2}\ \forall t_1, t_2 > 0$.

$\triangleleft$ Так как $V^{t_2} = V^{t_2-t_1}V^{t_1}$, то $\ker V^{t_1} \subset \ker V^{t_2}$. Пусть $u \in \ker V^{t_2}$, рассмотрим вектор-функцию $v(t) = V^t u$. Она аналитическая в секторе, содержащем $\mathbb{R}_+$, и равна нулю при $t \geq t_2$ (по доказанному). По теореме о единственности аналитической функции $v(t) = 0$ во всем секторе. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3.1. *Ядром* аналитической полугруппы $\{V^t : t > 0\}$ будем называть множество $\ker V^\cdot = \ker V^t, t > 0$.

В силу предыдущего утверждения это определение корректно.

Понятно, что ядро аналитической полугруппы является подпространством. Обозначим через $\hat{L}_0$ ($\hat{M}_0$) сужение оператора L (M) на $\ker U^\cdot$ ($\ker U^\cdot \cap \operatorname{dom} M$).

ЛЕММА 5.3.2. *Пусть оператор* M (L,p)*-секториален. Тогда* $\hat{L}_0 \in \mathcal{L}(\ker U^\cdot; \ker F^\cdot)$, $\hat{M}_0 : \ker U^\cdot \cap \operatorname{dom} M \to \ker F^\cdot$.

$\triangleleft$ Из замечания 5.2.5 следует, что если $U^t u = 0$, то $0 = LU^t u = F^t Lu$ ($0 = MU^t u = F^t Mu$) $\forall t > 0\ \forall u \in \mathcal{U}$ ($\forall u \in \operatorname{dom} M$). $\triangleright$

Через $\sigma_0^{\hat{L}}(\hat{M})$ будем обозначать $\hat{L}_0$-спектр оператора $\hat{M}_0$.

ЛЕММА 5.3.3. *Пусть оператор* M (L,p)*-секториален. Тогда* $\sigma_0^{\hat{L}}(\hat{M})$ не содержит конечных точек.

$\triangleleft$ Возьмем $\lambda \in \mathbb{C}$. Контур Γ, удовлетворяющий (5.2.3), в силу аналитичности используемых ниже подынтегральных функций мы можем выбрать лежащим "правее"точки λ. Тогда при любых $\varphi \in \ker U^\cdot \cap \operatorname{dom} M$, $f \in \ker F^\cdot$, $t > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{(\mu L - M)^{-1} e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu - \lambda}(\lambda L - M)\varphi d\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{(\mu-\lambda)t}\varphi}{\mu-\lambda}d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (\mu L - M)^{-1} L e^{(\mu-\lambda)t}\varphi d\mu = \varphi - e^{-\lambda t}U^t\varphi = \varphi,$$

$$(\lambda L - M)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(\mu L - M)^{-1}e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu-\lambda}fd\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu-\lambda}fd\mu - \frac{e^{-\lambda t}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}L(\mu L - M)^{-1}e^{\mu t}fd\mu = f - e^{-\lambda t}F^t f = f$$

в силу теоремы Коши, непрерывности оператора L и замкнутости M. Кроме того,

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(\mu L - M)^{-1}e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu-\lambda}gd\mu\right\|_{\mathcal{U}} \le$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{|e^{(\mu-\lambda)t}| \times \|(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})}}{|\mu-\lambda|}|d\mu| \times \|g\|_{\mathcal{F}} \le$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{t\,\mathrm{Re}(\mu-\lambda)}C|\mu|^p}{|\mu-\lambda|}|d\mu| \times \|g\|_{\mathcal{F}} \le \mathrm{const}\,\|g\|_{\mathcal{F}}.$$

Таким образом, $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ существует оператор

$$(\lambda\hat{L}_0 - \hat{M}_0)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(\mu L - M)^{-1}e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu-\lambda}d\mu\Big|_{\ker F^{\cdot}} \in \mathcal{L}(\ker F^{\cdot};\ker U^{\cdot}).\triangleright$$

СЛЕДСТВИЕ 5.3.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда существует оператор $\hat{M}_0^{-1} \in \mathcal{L}(\ker F^{\cdot};\ker U^{\cdot})$.*

$\triangleleft$ Достаточно взять в предыдущей лемме $\lambda = 0$. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 5.3.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда $\ker U^{\cdot} = \mathcal{U}^0$, $\ker F^{\cdot} = \mathcal{F}^0$.*

$\triangleleft$ Возьмем $\varphi \in \mathcal{U}^0 \setminus \{0\}$, т.е. φ – собственный или M-присоединенный вектор высоты $q \le p$ оператора L. Понятно, что собственный вектор, согласно (5.2.1), принадлежит $\ker U^{\cdot}$. Для M-присоединенного вектора φ рассмотрим выражение

$$U^t\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}R^L_\mu(M)e^{\mu t}\varphi d\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(-\varphi_{q-1} - \mu\varphi_{q-2} - ... - \mu^{q-1}\varphi_0)e^{\mu t}d\mu = 0,$$

где $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{q-1}\}$ – цепочка вектора φ. Здесь мы использовали лемму 1.3.4 (i).

Итак, $\mathcal{U}^0 \subset \ker U^{\cdot}$. Докажем обратное включение. Рассмотрим вектор $\psi = R^L_{(\mu,p)}(M)\varphi$, где $\varphi \in \ker U^{\cdot}$. В силу лемм 5.3.2, 5.3.3 $\psi = R^{\hat{L}_0}_{(\mu,p)}(\hat{M}_0)\varphi \in \ker U^{\cdot}$, поэтому по лемме 5.3.1

$$0 = \lim_{t\to 0+} U^t\psi = \psi = R^L_{(\mu,p)}(M)\varphi.$$

Таким образом, вектор $\varphi \in \mathcal{U}^0$. Следовательно, $\ker U^{\cdot} = \mathcal{U}^0$.

Теперь возьмем $f \in \mathcal{F}^0$. По лемме 1.3.6 (ii) $f = M\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{U}^0 \cap \operatorname{dom} M$. Поэтому $\forall t > 0$

$$F^t f = F^t M\varphi = MU^t\varphi = M0 = 0$$

по доказанному. Таким образом, $f \in \ker F^{\cdot}$, $\mathcal{F}^0 \subset \ker F^{\cdot}$.

Пусть $f \in \ker F^{\cdot}$, тогда $\hat{M}_0^{-1} f = \varphi \in \ker U^{\cdot} = \mathcal{U}^0$. Поэтому

$$L^L_{(\mu,p)}(M)f = L^L_{(\mu,p)}(M)\hat{M}_0\varphi = MR^L_{(\mu,p)}(M)\varphi = 0.\triangleright$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3.2. *Образом* полугруппы $\{V^t : t > 0\}$ назовем множество $\operatorname{im} V^{\cdot} = \{v \in \mathcal{V} : v = \lim\limits_{t\to 0+} V^t v\}$.

ЛЕММА 5.3.4. *Для аналитической полугруппы* $\{V^t : t > 0\}$ *имеем* $\ker V^{\cdot} \cap \operatorname{im} V^{\cdot} = \{0\}$.

$\triangleleft$ Пусть $v \in \ker V^{\cdot} \cap \operatorname{im} V^{\cdot}$. Тогда в силу утверждения 5.3.1 $\forall t > 0$ $V^t v = 0$. Поэтому $v = \lim\limits_{t\to 0+} V^t v = 0.\triangleright$

ЛЕММА 5.3.5. *Пусть полугруппа* $\{V^t : t > 0\}$ *сильно непрерывная и равномерно ограниченная. Тогда*

$$\operatorname{im} V^{\cdot} = \overline{\bigcup_{t>0} \operatorname{im} V^t}\quad .$$

$\triangleleft$ Докажем сначала замкнутость образа полугруппы $\operatorname{im} V^{\cdot}$. Возьмем последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \operatorname{im} V^{\cdot}$, сходящуюся к вектору $v \in \mathcal{V}$. Тогда имеем, что

$$\lim_{t\to 0+} \|V^t v - v\| = \lim_{t\to 0+} \|V^t v - V^t v_k + V^t v_k - v_k + v_k - v\| \leq$$

$$\lim_{t\to 0+} \|V^t\| \times \|v - v_k\| + \lim_{t\to 0+} \|V^t v_k - v_k\| + \|v - v_k\| =$$

$$(\lim_{t\to 0+}\|V^t\|+1)\|v-v_k\|\le \mathrm{const}\,\|v-v_k\|$$

в силу равномерной ограниченности полугруппы. Устремляем $k\to\infty$, получаем, что $\lim\limits_{t\to 0+} V^t v = v$, т.е. $v\in \operatorname{im} V^{\cdot}$.

Для $s>0$ и $v\in\mathcal{V}$ имеем вследствие сильной непрерывности полугруппы, что

$$\lim_{t\to 0+} V^t V^s v = \lim_{t\to 0+} V^{t+s} v = V^s v.$$

Таким образом, $\forall s>0$ $\operatorname{im} V^s \subset \operatorname{im} V^{\cdot}$. Так как образ полугруппы $\operatorname{im} V^{\cdot}$ замкнут, получаем, что

$$\overline{\bigcup_{s>0}\operatorname{im} V^s}\subset \operatorname{im} V^{\cdot}.$$

Возьмем $v\in \operatorname{im} V^{\cdot}$. Тогда последовательность

$$\{v_k = V^{\frac{1}{k}} v\}_{k=1}^{\infty}\subset \bigcup_{s>0}\operatorname{im} V^s$$

такова, что $v_k\to v$ при $k\to\infty$, поэтому

$$v\in \overline{\bigcup_{s>0}\operatorname{im} V^s}.\triangleright$$

Кроме того, можно заметить, что, согласно полугрупповому свойству,

$$\text{при}\quad s>t>0\quad \operatorname{im} V^s\subset \operatorname{im} V^t.$$

ТЕОРЕМА 5.3.2. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда* $\operatorname{im} U^{\cdot}=\mathcal{U}^1$, $\operatorname{im} F^{\cdot}=\mathcal{F}^1$.

$\triangleleft$ Согласно лемме 5.3.1 $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)\subset \operatorname{im} U^{\cdot}$. А так как по лемме 5.3.5 образ полугруппы $\operatorname{im} U^{\cdot}$ замкнут, то $\mathcal{U}^1\subset \operatorname{im} U^{\cdot}$.

В соответствии с теоремой Коши, L-резольвентным тождеством (1.3.2) и непрерывностью правой L-резольвенты

$$U^t u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\lambda(M) e^{\lambda t} u d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\lambda(M) e^{\lambda t} u d\lambda -$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_{\mu_0}(M) e^{\lambda t} u d\lambda = \frac{1}{2\pi i} R^L_{\mu_0}(M)\int\limits_{\Gamma}(\mu_0-\lambda) R^L_\lambda(M) e^{\lambda t} u d\lambda.$$

Повторив еще p раз эту процедуру, получим $\forall \mu_0, \mu_1, ..., \mu_p \in \rho^L(M)$

$$U^t u = R^L_{(\mu,p)}(M) \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \prod_{k=0}^{p} (\mu_k - \lambda) R^L_\lambda(M) e^{\lambda t} u d\lambda.$$

Таким образом, $\forall t > 0 \ \operatorname{im} U^t \subset \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$. Значит в силу леммы 5.3.5 $\operatorname{im} U^\cdot \subset \mathcal{U}^1$.

Утверждение об образе полугруппы $\operatorname{im} F^\cdot$ доказывается аналогично. $\triangleright$

Обозначим $\tilde{U}^t = U^t\Big|_{\tilde{\mathcal{U}}}$, $\tilde{F}^t = F^t\Big|_{\tilde{\mathcal{F}}}$. Через $\tilde{\mathcal{U}}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ обозначены те же подпространства, что и во второй, третьей главах.

ЛЕММА 5.3.6. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда*

$$\tilde{P} = s\text{-}\lim_{t \to 0+} \tilde{U}^t;$$

$$\tilde{Q} = s\text{-}\lim_{t \to 0+} \tilde{F}^t.$$

$\triangleleft$ Проекторы $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ определены ранее в лемме 5.1.3. Область определения оператора $s\text{-}\lim\limits_{t \to 0+} \tilde{U}^t$, согласно теоремам 5.3.1 и 5.3.2, есть $\mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1 = \tilde{\mathcal{U}}$ (по лемме 5.1.3), он непрерывен, так как полугруппа равномерно ограничена.

По теореме 5.3.1 рассматриваемый оператор на $\mathcal{U}^0$ нулевой, а по теореме 5.3.2 на $\mathcal{U}^1$ он тождественный. $\triangleright$

Из леммы 5.3.6 следует, что при условии (L,p)-секториальности оператора M полугруппу $\{\tilde{U}^t : t > 0\}$ $(\{\tilde{F}^t : t > 0\})$ можно доопределить в нуле по непрерывности

$$\tilde{U}^0 = \tilde{P} = s\text{-}\lim_{t \to 0+} U^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}) \qquad (\tilde{F}^0 = \tilde{Q} = s\text{-}\lim_{t \to 0+} F^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{F}})).$$

5.4.Единицы разрешающих полугрупп

Единицами полугрупп $\{U^t : t > 0\}$, $\{F^t : t > 0\}$ называются операторы

$$P = s\text{-}\lim_{t \to 0+} U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U}), \quad Q = s\text{-}\lim_{t \to 0+} F^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$$

соответственно, если они существуют.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4.1. *Единица полугруппы является проектором.*

$\triangleleft$ Действительно, для любого $u \in \mathcal{U}$

$$P^2u = \lim_{\tau\to 0+} U^\tau \lim_{t\to 0+} U^t u = \lim_{\tau\to 0+}\lim_{t\to 0+} U^\tau U^t u =$$

$$\lim_{\tau\to 0+}\lim_{t\to 0+} U^{\tau+t}u = \lim_{\tau\to 0+} U^\tau u = Pu.$$

Здесь мы использовали полугрупповое свойство и сильную непрерывность полугруппы $\{U^t : t > 0\}$. $\triangleright$

Из теоремы 2.3.1 и утверждения 5.1.1 следует

ТЕОРЕМА 5.4.1. *Пусть пространство $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$) рефлексивно, оператор M (L,p)-секториален.* Тогда $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4.1. Оператор M называется *сильно* (L,p)-*секториальным справа* (*слева*), если он (L,p)-секториален и при $\lambda, \mu_0, \mu_1, ..., \mu_p \in S^L_\theta(M)$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu\|_{\mathcal{U}} \le \frac{\mathrm{const}(u)}{|\lambda| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k|}$$

при любом $u \in \operatorname{dom} M$

(существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f\|_{\mathcal{F}} \le \frac{\mathrm{const}(f)}{|\lambda| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k|}$$

при любом $f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$).

ТЕОРЕМА 5.4.2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа (слева). Тогда существует единица полугруппы $\{U^t : t > 0\}$ ($\{F^t : t > 0\}$).*

$\triangleleft$ Пусть $u \in \operatorname{dom} M$, $s > t > 0$, $\tau = \frac{t}{p+1}$. Тогда

$$U^s u - U^t u = U^t \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \left(R^L_\lambda(M) - \frac{I}{\lambda}\right) u e^{\lambda(s-t)} d\lambda =$$

$$U^t \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} (\lambda L - M)^{-1} e^{\lambda(s-t)} \frac{d\lambda}{\lambda} Mu =$$

$$(U^\tau)^{p+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda L-M)^{-1}e^{\lambda(s-t)}\frac{d\lambda}{\lambda}Mu=$$

$$(2\pi i)^{-p-2}\int\limits_{\Gamma_0}\ldots\int\limits_{\Gamma_p}\int\limits_{\Gamma}R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}Mu\times$$

$$\times\exp\left(\sum_{k=0}^{p}\mu_k\tau+\lambda(s-t)\right)\frac{d\lambda}{\lambda}d\mu_0\ldots d\mu_p d\lambda,$$

где контуры Γ_k, $k=\overline{0,p}$, удовлетворяют (5.2.3) и расположены в разных комплексных плоскостях. Сделаем замены $\mu_k\tau=\nu_k$, $k=\overline{0,p}$, $\lambda(s-t)=\nu$. Очевидно, новые контуры интегрирования можно выбрать независящими от s и t. Обозначим эти контуры теми же символами $\Gamma_0,\Gamma_1,\ldots,\Gamma_p,\Gamma$. Вследствие сильной (L,p)-секториальности оператора M

$$\left\|\prod_{k=0}^{p}(\nu_k L-\tau M)^{-1}L\times(\nu L-(s-t)M)^{-1}Mu\right\|_{\mathcal{U}}\le\frac{\mathrm{const}(u)}{|\nu|\prod\limits_{k=0}^{p}|\nu_k|}.$$

Поэтому модуль рассматриваемого интеграла оценивается следующим образом:

$$(s-t)|(2\pi i)^{-p-2}|\int\limits_{\Gamma_0}\ldots\int\limits_{\Gamma_p}\int\limits_{\Gamma}\|\prod_{k=0}^{p}((\nu_k L-\tau M)^{-1}L)(\nu L-(s-t)M)^{-1}Mu\|\times$$

$$\times\left|\exp\left(\sum_{k=0}^{p}\nu_k+\nu\right)\right|\left|\frac{d\nu}{\nu}\right||d\nu_0|\ldots|d\nu_p||d\nu|\le$$

$$(s-t)\,\mathrm{const}(u)\left(\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\mathrm{Re}\,\nu}|d\nu|}{|\nu|}\right)^{p+1}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.4.1. Показать сходимость последнего интеграла, как при доказательстве теоремы 5.2.1.

Отсюда $\|(U^s-U^t)u\|_{\mathcal{U}}\le(s-t)\,\mathrm{const}(u)$ для любого $u\in\mathrm{dom}\,M$. Так как пространство $\mathcal{U}$ банахово, множество $\mathrm{dom}\,M$ плотно в $\mathcal{U}$, а полугруппа $\{U^t:t>0\}$ равномерно ограничена, получаем

$$P=s\text{-}\lim_{t\to 0+}U^t\in\mathcal{L}(\mathcal{U}).\quad\triangleright$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.4.2. Показать существование предела

$$Q = s\text{-}\lim_{t\to 0+} F^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F}).$$

СЛЕДСТВИЕ 5.4.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа (слева). Тогда* $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1)$.

$\lhd$ Докажем, что $\ker P = \ker U^{\cdot}$, $\operatorname{im} P = \operatorname{im} U^{\cdot}$. Пусть $u \in \ker U^{\cdot}$. Тогда в силу замечания 5.3.1 $U^t u = 0\ \forall t > 0$. Поэтому $Pu = \lim\limits_{t\to 0+} U^t u = 0$, т.е. $\ker U^{\cdot} \subset \ker P$. Если $Pu = 0$, то $U^t u = \lim\limits_{s\to 0+} U^{t+s} u = U^t P u = 0$ вследствие сильной непрерывности полугруппы и того, что $U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$. Поэтому $\ker P = \ker U^{\cdot}$.

Образ полугруппы $\operatorname{im} U^{\cdot} \subset \operatorname{im} P$ по определению 5.3.2. Пусть $u = Pv$, тогда $Pu = P^2 v = Pv = u$ в силу утверждения 5.4.1, т.е. $\operatorname{im} P \subset \operatorname{im} U^{\cdot}$, согласно определению образа полугруппы.

(Равенство $\ker Q = \ker F^{\cdot}$, $\operatorname{im} Q = \operatorname{im} F^{\cdot}$ доказывается аналогично).

Так как оператор P (Q) – проектор, то $\mathcal{U} = \ker P \oplus \operatorname{im} P = \ker U^{\cdot} \oplus \operatorname{im} U^{\cdot} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F} = \ker Q \oplus \operatorname{im} Q = \ker F^{\cdot} \oplus \operatorname{im} F^{\cdot} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1)$ в силу теорем 5.3.1, 5.3.2. $\rhd$

Итак, если оператор M сильно (L,p)-секториален справа (слева), то в силу леммы 5.3.6

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}, \quad \tilde{P} = P \quad (\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}, \quad \tilde{Q} = Q).$$

СЛЕДСТВИЕ 5.4.2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева. Тогда*

(i) $\forall u \in \mathcal{U}\ LPu = QLu$;

(ii) $\forall u \in \operatorname{dom} M\ Pu \in \operatorname{dom} M,\ MPu = QMu$.

$\lhd$ Возьмем произвольный вектор $u \in \operatorname{dom} M$. С учетом замкнутости оператора M и того,что существуют пределы

$$\lim_{t\to 0+} U^t u = Pu \quad \text{и} \quad \lim_{t\to 0+} MU^t u = \lim_{t\to 0+} F^t M u = QMu,$$

следует второе утверждение леммы.

Утверждение (i) доказывается аналогично с использованием непрерывности оператора L.$\rhd$

Напомним, что $L_k = L\Big|_{\mathcal{U}^k}$, $M_k = M\Big|_{\operatorname{dom} M_k}$, $\operatorname{dom} M_k = \operatorname{dom} M \cap \mathcal{U}^k, k = 0, 1$.

СЛЕДСТВИЕ 5.4.3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева. Тогда оператор* $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$ биективен; оператор $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.4.3. Доказать.

5.5.Существование обратного оператора

В этом параграфе мы укажем условия существования оператора $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.

Интегралом типа Данфорда-Тейлора определим семейство операторов $\{R^t : t > 0\}$

$$R^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\mu L - M)^{-1}e^{\mu t}d\mu, \qquad (5.5.1)$$

где контур Γ удовлетворяет (5.2.1), а оператор M (L,p)-секториален (поэтому интеграл сходится).

ЛЕММА 5.5.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда семейство операторов $\{R^t : t > 0\}$, определяемое соотношением* (5.5.1), *аналитично в секторе* $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg\tau| < \theta - \pi/2\}$.

◁ В силу (5.2.1)

$$\exists N > 0 \quad \forall \mu \in \Gamma : |\mu| > N \quad \forall \tau \in \mathbb{C} : |\arg\tau| < \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$\left(|\arg\mu + \arg\tau| \geq \Big||\arg\mu| - |\arg\tau|\Big| > \theta - \theta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\wedge\left(|\arg\mu + \arg\tau| \leq |\arg\mu| + |\arg\tau| < \theta + \theta - \frac{\pi}{2} = 2\theta - \frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left. < 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}\right).$$

Поэтому $\mathrm{Re}(\mu\tau) = |\mu\tau|\cos(\arg\mu + \arg\tau) < 0$.

Интеграл (5.5.1) можно дифференцировать по параметру τ. Лемма доказана. ▷

УПРАЖНЕНИЕ 5.5.1. Проделать доказательство леммы более подробно.

ЛЕММА 5.5.2. *В условиях леммы* 5.5.1

(i) $\forall t > 0$ $R^tL = U^t$, $LR^t = F^t$;

(ii) $\forall s, t > 0$ $R^{s+t} = U^s R^t = R^t F^s$.

Утверждение (i) очевидно, (ii) доказывается с помощью аналога тождества Гильберта.

УПРАЖНЕНИЕ 5.5.2. Доказать лемму 5.5.2 (ii).

ЛЕММА 5.5.3. *Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален справа (слева). Тогда*

$$\forall t > 0 \quad R^t = PR^t \quad (R^t = R^t Q).$$

Для доказательства устремим в утверждении леммы 5.5.2 (ii) s к нулю (непрерывность семейства (5.5.1) следует из леммы 5.5.1).

ЛЕММА 5.5.4. *Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален справа (слева). Тогда*

$$\overline{\bigcup_{t>0} \operatorname{im} R^t} = \mathcal{U}^1 \quad (\forall t > 0 \quad \ker R^t = \mathcal{F}^0).$$

$\lhd$ Если $u \in \operatorname{im} U^t$, то в силу леммы 5.5.2 (i) $u = U^t v = R^t L v$ при некотором $v \in \mathcal{U}$. Отсюда $\forall t > 0$ $\operatorname{im} U^t \subset \operatorname{im} R^t$. В силу леммы 5.3.5 и теоремы 5.3.2 получаем, что

$$\mathcal{U}^1 \subset \overline{\bigcup_{t>0} \operatorname{im} R^t}.$$

Если при некотором $f \in \mathcal{F}$ $u = R^t f$, то по лемме 5.5.3 $u = PR^t f$, т.е. $\forall t > 0$ $\operatorname{im} R^t \subset \mathcal{U}^1$. Таким образом, в силу замкнутости подпространства $\mathcal{U}^1$ получаем

$$\overline{\bigcup_{t>0} \operatorname{im} R^t} \subset \mathcal{U}^1.$$

Пусть $t > 0$, $f \in \mathcal{F}^0$. Тогда по лемме 5.5.3 $R^t f = R^t Q f = 0$. Поэтому $\mathcal{F}^0 \subset \ker R^t$. Если же $R^t f = 0$, то $F^t f = L R^t f = 0$ в силу леммы 5.5.2 (i). Из теоремы 5.3.1 следует, что $\ker R^t \subset \mathcal{F}^0$. $\rhd$

Можно еще заметить, что, как и в случае с полугруппами, образы операторов R^t "расширяются"при уменьшении t, т.е.

$$\text{при} \quad s > t > 0 \quad \operatorname{im} R^s \subset \operatorname{im} R^t,$$

что следует из леммы 5.5.2 (ii).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5.1. Оператор M называется *сильно* (L,p)-*секториальным*, если он сильно (L,p)-секториален слева и

$$\forall\lambda,\mu_0,...,\mu_p\in S^L_\theta(M)\quad \|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})}\le\frac{\mathrm{const}}{|\lambda|\prod\limits_{k=0}^{p}|\mu_k|}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.5.3. Показать, что сильно (L,p)-секториальный оператор M сильно (L,p)-секториален справа.

УПРАЖНЕНИЕ 5.5.4. Пусть существует оператор $L^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$ и оператор $T=ML^{-1}$ (или $S=L^{-1}M$) секториален. Показать, что тогда оператор M сильно (L,p)-секториален. В качестве плотного в пространстве $\mathcal{F}$ линеала $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ взять $L[\operatorname{dom}M]$.

ТЕОРЕМА 5.5.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, и ∞ – устранимая особая точка либо полюс порядка $p\in\mathbb{N}$ L-резольвенты $(\mu L-M)^{-1}$ оператора M. Тогда оператор M сильно (L,p)-секториален.*

$\lhd$ В силу (L,σ)-ограниченности оператора M

$$\exists d>0\quad\forall\mu\in\mathbb{C}\quad(|\mu|>d)\Rightarrow\left(\mu\in\rho^L(M)\right).$$

Возьмем $\mu:|\mu|>d$. Тогда

$$(\mu L-M)^{-1}=(\mu H-I)^{-1}M_0^{-1}(I-Q)+(\mu I-S_1)^{-1}L_1^{-1}Q=$$

$$-\sum_{k=0}^{p}\mu^kH^kM_0^{-1}(I-Q)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k}S_1^kL_1^{-1}Q=$$

$$-M_0^{-1}\sum_{k=0}^{p}\mu^kJ^k(I-Q)+\frac{1}{\mu}L_1^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k}T_1^kQ,$$

где $S_1=L_1^{-1}M_1$, $T_1=M_1L_1^{-1}$, $H=M_0^{-1}L_0$, $J=L_0M_0^{-1}$, как и прежде. Будем брать μ такие, что

$$|\mu|>r=\max\{d,2\|S_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1)},2\|T_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^1)}\}.$$

Тогда

$$R^L_\mu(M)=-H\sum_{k=0}^{p}\mu^kH^k(I-P)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k}S_1^kP,\qquad(5.5.2)$$

$$L_\mu^L(M) = -J\sum_{k=0}^{p}\mu^k J^k(I-Q) + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k}T_1^k Q. \qquad (5.5.3)$$

Отсюда в силу замечания 5.3.2 получим при $\mu_k : |\mu_k| > r$, $k = \overline{0,p}$,

$$\|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} \le \frac{1}{|\mu_0 \ldots \mu_p|}\prod_{k=0}^{p}\frac{1}{1-\frac{\|T_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^1)}}{|\mu_k|}} \le \frac{2^{p+1}}{|\mu_0 \ldots \mu_p|}$$

в силу выбора μ_k.

Покажем, что $2/|\mu| \le C/|\mu - a|$ при некоторых $a > r$ (это позволит нам взять $\theta \in (\pi/2, \pi)$), $C > 0$ и любых μ из нужного нам сектора с вершиной в точке a. Пусть $\operatorname{Re}\mu = x$, $\operatorname{Im}\mu = y$. Должно выполняться неравенство

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{C}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}},$$

т.е.

$$4x^2 - 8ax + 4a^2 + 4y^2 \le C^2x^2 + C^2y^2.$$

Отсюда

$$x^2 + \frac{8ax}{C^2-4} + y^2 \ge \frac{4a^2}{C^2-4},$$

$$\left(x + \frac{4a}{C^2-4}\right)^2 + y^2 \ge \frac{4a^2C^2}{(C^2-4)^2}.$$

Получили внешность круга. Точка этого круга с наибольшей действительной частью – $(\frac{2a}{C+2}, 0)$. Следовательно, должны выполняться неравенства

$$a > r, \quad \frac{2a}{C+2} \le r.$$

Взяв, скажем $a = 2r$, $C \ge 2$, мы добьемся выполнения условий (5.1.1) (при некотором $\theta \in (\pi/2, \pi)$), (5.1.2) (с константой $K = C^{p+1}$, для правой (L,p)-резольвенты доказывается аналогично с использованием тождества (5.5.2) и нильпотентности степени не больше p оператора H).

Возьмем в качестве $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ линеал $\mathcal{F}^0 \oplus L_1[\operatorname{dom} M_1]$. По построению он плотен в пространстве $\mathcal{F}$, так как линеал $L_1[\operatorname{dom} M_1]$ плотен в $\mathcal{U}^1$

вследствие того, что L_1 – гомеоморфизм. Пусть вектор $f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$, тогда из тождества (5.5.3) и нильпотентности оператора J следует, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\|_{\mathcal{F}} = \|T_1 R_\lambda(T_1) \prod_{k=0}^{p} R_{\mu_k}(T_1) Q f\|_{\mathcal{F}} \leq$$

$$\|R_\lambda(T_1)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^1)} \times \prod_{k=0}^{p} \|R_{\mu_k}(T_1)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^1)} \times \|T_1 Q f\|_{\mathcal{F}}.$$

Здесь мы использовали то, что оператор коммутирует со своей резольвентой, а вектор $Qf \in \operatorname{dom} T_1$ по выбору f. Можно заметить, используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, что в построенном нами секторе $S^L_{a,\theta}(M)$ сильная (L,p)-секториальность оператора M слева имеет место. Его сильная (L,p)-секториальность доказывается аналогично. $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 5.5.5. Завершить доказательство.

ЛЕММА 5.5.4. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда семейство операторов $\{R^t : t > 0\}$, определяемое формулой* (5.5.1), *равномерно ограничено.*

$\triangleleft$ Используя лемму 5.5.2 и поступив, как при доказательстве теоремы 5.4.2, получим при $t = (p+2)\tau$

$$R^t = U^{(p+1)\tau} R^\tau = (2\pi i)^{-p-2} \int\limits_{\Gamma_0} \int\limits_{\Gamma_1} \ldots \int\limits_{\Gamma_p} \int\limits_{\Gamma} R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} \times$$

$$\times \exp\left(\sum_{k=0}^{p} \mu_k \tau + \lambda \tau\right) d\lambda d\mu_p \ldots d\mu_1 d\mu_0.$$

Сделаем замены $\mu_k \tau = \nu_k$, $\lambda \tau = \nu$ и воспользуемся возможностью выбрать новые контуры интегрирования, которые по-прежнему будем обозначать через $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_p, \Gamma$, независимыми от τ. Тогда

$$\|R^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq \mathrm{const} \int\limits_{\Gamma_0} \int\limits_{\Gamma_1} \ldots \int\limits_{\Gamma_p} \int\limits_{\Gamma} \left|\exp\left(\sum_{k=0}^{p} \nu_k + \nu\right)\right| \times$$

$$\times \left|\frac{d\nu}{\nu}\right| \left|\frac{d\nu_p}{\nu_p}\right| \ldots \left|\frac{d\nu_1}{\nu_1}\right| \left|\frac{d\nu_0}{\nu_0}\right| = C.$$

ТЕОРЕМА 5.5.2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.*

$\triangleleft$ Пусть $f \in \mathcal{F}$, $s > t > 0$. Тогда

$$\|R^s f - R^t f\|_{\mathcal{F}} = \|R^t(F^{s-t} - Q)f\|_{\mathcal{F}} \leq C\|(F^{s-t} - Q)f\|_{\mathcal{F}}$$

в силу лемм 5.5.2, 5.5.3 и 5.5.4. Отсюда следует существование оператора $\hat{R} = s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} R^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$. Согласно лемме 5.5.2 и с учетом непрерывности оператора L, $\hat{R}L = P$ и $L\hat{R} = Q$. Сузив эти тождества на $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$ соответственно, получим

$$\hat{R}_1 L_1 = I, \quad L_1\hat{R}_1 = I,$$

где $\hat{R}_1 = \hat{R}\Big|_{\mathcal{F}^1}$. Таким образом, $\hat{R}_1 = L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.5.6. Показать, что при условии сильной (L,p)-секториальности оператора M множество $L_1[\mathrm{dom}\, M_1]$ плотно в $\mathcal{F}^1$.

Сужение $\{U_1^t : t \geq 0\}$ ($\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}_+}\}$) полугруппы $\{U^t : t \geq 0\}$ ($\{F^t : t \geq 0\}$) на подпространство $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$) является невырожденной аналитической полугруппой.

Сохраним старые обозначения: $S_1 = L_1^{-1}M_1$, $T_1 = M_1 L_1^{-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.5.1. *В условиях теоремы* 5.5.2 *инфинитезимальным генератором полугруппы* $\{U_1^t : t \geq 0\}$ ($\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}_+}\}$) *является оператор* $S_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1)$ ($T_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{F}^1)$).

Доказывается это следствие так же, как аналогичный результат для аналитических групп: с использованием интегрального представления полугрупп (5.2.1), теоремы 5.5.2 и тождеств

$$R_\mu^{L_1}(M_1) = R_\mu(S_1), \quad L_\mu^{L_1}(M_1) = R_\mu(T_1).$$

Областью определения оператора T_1 (S_1) является линеал $L_1[\mathrm{dom}\, M_1]$ ($\mathrm{dom}\, M_1$), который плотен в пространстве $\mathcal{F}^1$ ($\mathcal{U}^1$). $\triangleright$

Используя теорему Хилле – Иосиды – Феллера – Филлипса – Миядеры, сразу получим

СЛЕДСТВИЕ 5.5.2. *В условиях теоремы* 5.5.2 *оператор* S_1 (T_1) *секториален.*

УПРАЖНЕНИЕ 5.5.6. Будем называть *сильно p-секториальным* (I,p)-секториальный оператор M при $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. Показать, что понятие сильно p-секториального оператора совпадает с понятием секториального оператора.

5.6. Генераторы аналитических полугрупп операторов с ядрами

В предыдущих параграфах этой главы было показано, как пара операторов (L, M), где оператор M сильно (L,p)-секториален, порождает пару аналитических полугрупп $(\{U^t : t \geq 0\}, \{F^t : t \geq 0\})$ операторов с ядрами. В этом параграфе решим обратную задачу: по паре аналитических полугрупп построим пару операторов с теми же свойствами. При этом некоторые из полученных выше необходимых условий сильной (L,p)-секториальности оператора M используем в качестве достаточных.

Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{F}$ – банаховы пространства. Перечислим вышеупомянутые условия (обозначены (D1)-(D5)).

(D1) *Существует пара* $(\{U^t : t \geq 0\}, \{F^t : t \geq 0\})$ *аналитических в некотором секторе* $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, *сильно непрерывных вплоть до нуля и равномерно ограниченных полугрупп операторов* $U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $F^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ *с ядрами.*

Единицы полугрупп обозначим $P = U^0$, $Q = F^0$. В силу полугруппового свойства единицы являются проекторами. Из аналитичности и сильной непрерывности вплоть до нуля следует, что ядра и образы полугрупп совпадают с ядрами и образами единиц полугрупп. Обозначим

$$\ker U^{\cdot} = \ker P = \mathcal{U}^0, \quad \ker F^{\cdot} = \ker Q = \mathcal{F}^0,$$
$$\operatorname{im} U^{\cdot} = \operatorname{im} P = \mathcal{U}^1, \quad \operatorname{im} F^{\cdot} = \operatorname{im} Q = \mathcal{F}^1.$$

Таким образом,

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1.$$

Через $\{U_1^t : t \geq 0\}$ ($\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}_+}\}$) обозначим сужение полугруппы $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}_+}\}$ ($\{F^t : t \geq 0\}$) на $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$).

По построению аналитические полугруппы $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}_+}\}$ и $\{F_1^t : t \geq 0\}$ невырожденные, т.е. $\ker U_1^{\cdot} = \{0\}$ и $\ker F_1^{\cdot} = \{0\}$. Поэтому по теореме Хилле – Иосиды – Феллера – Филлипса – Миядеры существуют секториальные операторы $S_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1)$ и $T_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{F}^1)$ (причем, $S_{\theta_1}(S_1) = S_{\theta_2}(T_1)$, т.е. $\theta_1 = \theta_2 = \theta$; если это не так, возьмем $\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$) такие, что

$$U_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\mu(S_1) e^{\mu t} d\mu, \qquad F_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\mu(T_1) e^{\mu t} d\mu, \qquad (5.6.2)$$

где $t > 0$, $U_1^0 = I$, $F_1^0 = I$, а контур Γ удовлетворяет (5.2.1).

(D2) *Существует линейный гомеоморфизм* $L_1 : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1$ *такой, что* $L_1 S_1 = T_1 L_1$.

(D3) *Существует биективный оператор* $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$.

Так как оператор M_0 биективен, существует оператор M_0^{-1}, который линеен и замкнут как обратный к линейному и замкнутому. В силу сюръективности M_0 обратный к нему оператор определен на всем $\mathcal{F}^0$, а значит, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$.

(D4) *Существует оператор* $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$ *такой, что оператор* $M_0^{-1} L_0$ *нильпотентен степени не больше* p, $p \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$.

$$\text{(D5)} \quad L = L_0(I - P) + L_1 P, \quad M = M_0(I - P) + L_1 S_1 P,$$

$$\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} M_0 \dot{+} \operatorname{dom} S_1.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.6.1. Показать, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

ТЕОРЕМА 5.6.1. *Оператор M сильно (L,p)-секториален тогда и только тогда, когда выполнены все условия (D1)-(D5).*

УПРАЖНЕНИЕ 5.6.2. Доказать теорему по аналогии с предыдущими главами.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ. М.:Мир, 1967. 475 с.

2. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. Однопараметрические полугруппы. М.:Мир, 1992. 351 с.

3. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 275 с.

4. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.

5. Свиридюк Г.А. Задача Коши для линейного операторного уравнения типа Соболева с неположительным оператором при производной // Дифференц. уравнения. 1987. Т.23, т 10. С.1823-1825.

6. Свиридюк Г.А. Задача Коши для линейного сингулярного операторного уравнения типа Соболева // Дифференц.уравнения. 1987. Т.23, т 12. С.2168-2171.

7. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т.49, т 4. С.47-74.

8. Свиридюк Г.А. Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами // ДАН. 1994. Т.337, т 5. С.581-584.

9. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева // Сиб. мат. журн. 1995. Т.36, т 5. С.1130-1145.

10. Федоров В.Е. Сильно непрерывные полугруппы и относительно p-радиальные операторы. М., 1995. 30 с. Деп. в ВИНИТИ 29.06.95, т 2665В-95.

11. Федоров В.Е. Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами // ДАН. 1996. Т.351, т 3. С.316-318.

12. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.:Мир, 1985. 376 с.

13. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностр. лит., 1962. 829 с.

Федоров Владимир Евгеньевич

Полугруппы и группы операторов с ядрами

Учебное пособие

Редактор Н.П.Мирдак

Подписано в печать 30.06.98. Формат 60 84 1/16.
Бумага типографская № 2. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,54. Уч.-изд. л. 4,58. Тираж 100 экз.
Заказ 226. Цена договорная

Челябинский государственный университет.
454021 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.

Полиграфический участок Издательского центра ЧелГУ.
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57-Б.